STŘEDNÍ ŠKOLA ELEKTROTECHNICKÁ, OSTRAVA,

NA JÍZDÁRNĚ 30, p. o.

MATEMATIKA

Ing. Rudolf PŠENICA 2006

OBSAH:

1. SHRNUTÍ A PROHLOUBENÍ UČIVA

1.1. Základní množinové pojmy

Množina – soubor nějakých prvků

Podmnožina – množina A je podmnožinou množiny B ($A \subset B$), jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B.
Každá množina je podmnožinou sebe sama. ($A \subset A$)

Prázdná množina – nemá žádný prvek $\emptyset$
Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Rovnost množin – množiny A,B se rovnají obsahují-li tytéž prky (A = B)

Doplněk množiny – je -li A podmnožinou množiny B, pak doplněk množiny Á obsahuje Všechny prvky množiny B, které nepatří do množiny A.

Poznámka: Rozlišit pojmy být prvkem a být podmnožinou
0 je prvek množiny $\{ 0,1,2 \}$
{0} je podmnožinou množiny $\{ 0,1,2 \}$

Průnik množin - je množina všech prvků, které jsou obsaženy v obou množinách zároveň

Disjunktní množiny - jejich průnik je prázdný.
($A \cap B = \emptyset$)

Sjednocení množin - je množina všech prvků, které jsou obsaženy v jedné z obou množin
($A \cup B$)

Rozdíl množin - je množina všech prvků množiny A, které nejsou prvky množiny B
(A – B)

Cvičení:

1. $A = \{ 1,3,5,7 \}$
$B = \{ 2, 3,4,5 \}$

Zjistěte a) $A \cap B$, b) $A \cup B$, c) A – B , d) všechny podmnožiny A.

a) {3,5} , b) {1,2,3,4,5,7} , c) {1,7}
d) $\emptyset$, {1}, {3}, {5}, {7}, {1,3}, {1,5},
{1,7}, {3,5}, {3,7}, {5,7}, {1,3,5}, {1,3,7}
{1,5,7}, {3,5,7}, {1,3,5,7}

Podmnožin je celkem 2^N , kde n je počet prvků množiny.

2. Podnik má 600 zaměstnanců. 300 zaměstnanců neumí žádný cizí jazyk, 200 umí německy a 150 anglicky. Kolik lidí umí oba jazyky?

[50]

1.2. Číselné množiny

Čísla přirozená..N

Čísla celá – čísla přirozená, čísla k nim opačná a 0 ....Z

Čísla racionální – lze zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q, jsou čísla celá a q $\neq 0$......Q

Čísla iracionální – nelze zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$

Čísla reálná – čísla racionální a čísla iracionální ....R

Čísla komplexní – a + bi, kde i je imaginární jednotka...................................K

Racionální čísla

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{q.s}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p.r}{q.s}$$

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{ps}{qr}$$

1.3. Intervaly

<u>Omezený interval</u> v množině R lze znázornit úsečkou na číselné ose

uzavřený, polozavřený otevřeny

nechť a,b jsou libovolná reálná čísla, a < b

$\langle$ a , b $\rangle$ (a , b$\rangle$

$\langle$ a , b) (a , b)

Neomezený interval - znaky $+\infty$

$-\infty$

$\langle$ a, + ∞) (- ∞, a $\rangle$

(a, ∞) (- ∞, a)

1.4. Absolutní hodnota reálného čísla

<u>Definice</u> : Absolutní hodnota každého reálného čísla je rovna vzdálenosti tohoto čísla na číselné ose od počátku

pro a ≥ 0 je $|a| =$ a

pro a < 0 je | a | = - a

Věta. 1. Pro každé $a \in R$ je | a | ≥ 0

2. Pro každé $a \in R$ je | a | = |- a|

Opačné číslo k reálnému číslu a je reálné číslo $\bar{a}$, pro něž platí $a + \bar{a} = 0$

Převrácené číslo k reálnému číslu a je reálné číslo a pro něž platí a . $\bar{a}$ = 1

1.5. Početní operace v N, Q, R

a + b = b + a , a . b = b . a **} komutativní zákon**

a + (b + c) = (a + b) + c, a .(b . c) = (a . b) . c **} asociativní zákon**

(a + b) . c = a . c + b . c **} distributivní zákon**

a + 0 = a
a . 1 = a
a . 0 = 0

Věta: Je- li a . b = 0 je alespoň jedno z čísel a,b rovno 0.

1.6. Výrazy

Proměnné jsou písmena, která v zápisu zastupují čísla z určité číselné množiny.

příklad: $o = 2\pi r$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 . v$ Kužel

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Konstanty – písmena nahrazující určitá čísla z určité číselné množiny.

příklad: π

Číselné výrazy - 2, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Výrazy s proměnnou - $4x^2$, $5y - 3\sqrt{z}$

Lomené výrazy – proměnná je ve jmenovateli, musíme udat podmínky, kdy má výraz smysl.

příklad: $\frac{3}{x}$, $\frac{a+b}{a-b}$

$x \neq 0$, $a \neq b$

Mnohočleny: $a_N x a^n + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mnohočlen n – tého stupně

1.7. Mnohočleny a početní operace s nimi

$$a_N \; x a^n + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$ mnohočlen n – tého stupně

Sčítání: sečteme členy, které mají stejné základny a stejné exponenty

$$(a + b - c) + (a -3b + 2c) = 2a -3b + b^2 + c$$

Odčítání: přičteme mnohočlen s opačnými znaménky

$$(a + b - c) - (b -3c) = a + b - c - b + 3c= a + 3c$$

Násobení: každý člen prvního mnohočlenu násobíme každým členem druhého mnohočlenu.

$$(2a + 3a^2 b + b) \; . \; (a^2 + 2b) = 2a^3 + 3a^4 + a^2 b + 4ab + 6 a^2 b^2 + 2b^2$$

Dělení: dělitel musí být různý od nuly

1) Oba mnohočleny uspořádáme sestupně podle klesajících mocnin proměnné
2) Dělíme: a) první člen dělence dělíme prvním členem dělitele. Získaným podílem násobíme všechny členy dělitele. Tento součin odečteme od dělence.
   b) Postup opakujeme
3) Zkouška: součin dělitele a podílu = dělenec

příklad: $(20a^3 + 32a^2 + 7a^4 - 5a) : (-1 + 7a) = a^3 + 3a^2 + 5a$ $\quad [\, a \neq \frac{1}{7} \,]$

1.8. Vzorce a mocniny

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$A^2 - B^2 = (A-B) \, . \, (A+B)$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3$

$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2 B + 3AB^2 - B^3$

$A^3 + B^3 = (A+B) \, (A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A-B) \, (A^2 + AB + B^2)$

Definice: pro každé reálné č. a a každé celé kladné číslo n je $a^n = a.a\ldots..a$ (v součinu je n činitelů)

Pro každé reálné číslo a $\neq 0$ je $a^0 = 1$

a^n - mocnina, a – základ, n – exponent (mocnitel)

$a^r . a^s = a^{r+s}$ $\qquad (a^r)^s = a^{r.s}$

$(a.b)^n = a^n . b^n$ $\quad a^r : a^s = a^{r-s}$ pro $a \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Definice : pro každé reálné číslo $a \neq 0$ a každé celé záporné číslo m je

$$a^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = \frac{1}{a^{-m}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} \qquad a \neq 0,\ b \neq 0$$

1.9. Rozklad výrazů

1) vytýkání společného činitele

$22ab^2 + 28a^2b^2 + 14a^4b = 2ab\ .\ (11b + 14ab + 7a^3)$

2) postupné vytýkání

$5by + 15b^2x + 4ay + 12abx = 5b(y + 3bx) + 4a(y + 3bx) = (y+3bx).\ (5b+ 4a)$

3) pomocí vzorců

$9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a-2b)^2$

4) kombinace předešlých

$a^2b^4 - b^6 = b^4(a^2 - b^2) = b^4(a-b).(a+b)$

$h^4 - 1 = (h^2 - 1).(h^2 + 1) = (h-1).(h+1).(h^2 + 1)$

$p^2 - (p-r)^2 = [p-(p-r)].[p+(p-r)] = (+r).(2p-r)$ nebo

$= p^2 - (p^2 - 2pr + r^2) = 2pr - r^2 = r.(2p-r)$

1.10. Lomené výrazy a početní operace s nimi

U lomených výrazů je nutné určit jejich definiční obor, tj. obor hodnot proměnných,pro něž má daný lomený výraz smysl.

$$\frac{4x}{2x^2} = \frac{2}{x} \qquad x \neq 0$$

$$\frac{18a - 30}{12a^2 - 20a} = \frac{6(3a-5)}{4a(3a-5)} = \frac{3}{2a}$$

$a \neq 0 \quad 3a - 5 \neq 0$

$3a \neq 5$

$a \neq \frac{5}{3}$

Krátit lomený výraz znamená čitatele i jmenovatele dělit týmž výrazem různým od 0.

Rozšířit lomený výraz znamená čitatele i jmenovatele násobit týmž výrazem různým od nuly.

Př: $\frac{8a}{a-b}$ rozšiřte výrazem různým a+b $a \neq b$

$a \neq -b$

$$\frac{8a}{a-b} = \frac{8a(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{8a(a+b)}{a^2-b^2}$$

Sčítání (odčítání) – lomené výrazy se převedou na společného jmenovatele a sečtou (odečtou)se.

Násobení – čitatel čitatelem, jmenovatel jmenovatelem

Dělení – násobí se převrácenou hodnotou lomeného výrazu

př: $18a – 45a^2 + 63a^3 = 9a$

př: px + 7y –py -7x = p(x- + 7(y-x) =

př: $x^2 + (a-b)\,x – a.b = (x.a).(x-b)$

př: uspořádejte podle velikosti

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + 1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{3},$$

2. LINEÁRNÍ FUNKCE, LINEÁRNÍ ROVNICE A NEROVNICE A JEJICH SOUSTAVY

2.1. Lineární funkce, konstantní funkce

Definice: zobrazení množiny A do množiny B je pravidlo, které každému prvku a $\in$ A přiřazuje právě jeden prvek b$\in$ B.

Definice: funkce je každé zobrazení množiny A do množiny R, kde A je libovolná podmnožina množiny R
A – definiční obor fce

Definice: funkce je pravidlo, pomocí kterého je každému reálnému číslu x $\in$ A přiřazeno právě jedno reálné číslo y

fce…….....................f,g,h,…….

def. obor…………...D(f), D(g),D(h),………

Kartézská soustava souřadnic 0xy
Kolmé přímky x,y, s průsečíkem 0.

A = $\lfloor x_{o,,} y_o \rfloor$ x_0 - první souřadnice bodu A

y_0 - druhá souřadnice bodu A

Definice: Graf funkce f ve zvolené kartézské soustavě souřadnic 0xy se nazývá množina všech bodů
X=[x,f(x)] , kde x $\in$ D(f)

Definice: Konstantní fce je každá fce, vyjádřená ve tvaru y = b, x$\in$ R kde **b** je reálné číslo.

Definice: Lineární fce je každá fce, vyjádřené ve tvaru y = ax + b, x$\in$ R, kde **a** je reálné číslo různé od nuly, **b** je libovolné reálné číslo

Věta: Grafem konstantní fce je přímka rovnoběžná s osou x.

Věta: Grafem lineární fce je přímka různoběžná s osou x i s osou y.

Věta: Přímka rovnoběžná s osou y není grafem žádné fce.

Př: f_1 : y = -1

f_2 : y = 2x +1 Sestrojte grafy funkcí.

2.2. Lineární rovnice

Definice: rovnice je lineární, když ji lze ekvivalentními úpravami převést na tvar ax + b = 0
kde **a** je reálné číslo různé od nuly, **b** je libovolné reálné číslo.

Ekvivalentní úpravy:

1. K oběma stranám rovnice přičteme (odečteme) stejný výraz
2. Obě strany rovnice násobíme (dělíme) stejným výrazem různým od nuly

Věta: Lineární rovnice ax + b = 0 o neznámé $x \in R$ má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$

Cvičení:

Řešte rovnice v množině Z

a) 2x – 8 = 6 [7]

b) 0,8x – 4,5 = 2 [nemá řešení, x = $\frac{47}{8}$]

c) 2x – 3 = 3x + 1 [-4]

2.3. Lineární nerovnice

$l(x) < p(x)$ $l(x)$ - levá strana nerovnic

$l(x) > p(x)$ $p(x)$ - pravá strana nerovnic

$l(x) \leq p(x)$

$l(x) \geq p(x)$ P – množina všech řešení nerovnic

Ekvivalentní úpravy.

1. K oběma stranám nerovnice přičteme (odečteme) stejný výraz.

2.a) Obě strany nerovnice vynásobíme (vydělíme) stejným výrazem, který je kladný

b) Obě strany nerovnice vynásobíme (vydělíme) stejným záporným výrazem – znak nerovnosti se změní v opačný.

Definice: Nerovnice je lineární, když ji lze ekvivalent. úpravami převést na jeden z tvarů.

$ax+b<0$ $ax+b>0$ $ax+b\leq 0$ $ax+b\geq$, přitom **a** je reálné číslo různé od nuly,
b je libovolné reálné číslo.

př: $\frac{4u-3}{5}+\frac{4u-9}{6}\leq\frac{3u-4}{2}$

$$u \geq -3$$

$$P = \langle -3, +\infty)$$

Zkouška

př: Řešte pro y $\in$ N (č.přirozená)

$3y-2=6, \quad 3y-2 \leq 6, \quad 3y-2 \geq 6, \quad 3y-2>6$

př: Řešte pro z $\in$ R (č.reálná)

$3(2z-4)<5(3+3z)$ $\qquad \frac{z-3}{5} - \frac{6-2z}{3} \geq 2$

$2(6-2z)-3(0{,}5+z) \geq 5{,}5+3z$

2.4. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

př: Sestrojte graf fce $g: y=|x|, \; x \in R$

pro $x \leq 0$ platí $|x| = -x$

$x \geq 0$ platí $|x| = x$

graf

$g_1: y = -x, \quad x \in (-\infty, 0\rangle$

$g_2: y = x, \quad x \in \langle 0, +\infty)$

př: Určete všechna x $\in$ R, pro která jsou hodnoty fce

m: $y = |x-2|$, x $\in$ R menší nebo rovny číslu 5.

Řešení: Sestrojíme graf fce m:

Zjistíme pro která x $\in$ R je:

a) $|x-2| = x-2 \quad \Rightarrow x-2 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 2$

b) $|x-2| = -(x-2) \quad \Rightarrow x-2 \leq 0 \quad \Rightarrow x \leq 2$

Fce m se skládá z grafů fcí $m_1: y = 2-x \quad, x \in (-\infty, 2\rangle$

$m_2: y = x-2 \quad, x \in \langle 2, \infty)$

Hledáme x $\in$ R, pro která je $m_{(x)} \leq 5$.

Tuto podmínku splňuje **x $\in$ R $\langle$ -3, 7 $\rangle$**

Př: $|x-2| \leq 5$

a) $|x-2| = x-2$

$x-2 \geq 0$

$\mathbf{x \geq 2} \qquad x \in \langle 2, +\infty)$

b) $|x-2| = -x-2$

$|x-2| = -x+2$

$x-2 \leq 0$

$\mathbf{x \leq +2} \qquad x \in (-\infty, 2\rangle$

$x - 2 \leq 5$ $\qquad$ $-x+2 \leq 5$

$\mathbf{x \leq 7}$ $\quad x \in (-\infty, 7\rangle$ $\qquad$ $x \geq -3$ $\quad x \in \langle -3, +\infty)$

$P_1 = \langle 2,7 \rangle$ $\qquad$ $P_2 = \langle -3, 2 \rangle$

$P = P_1 \cup P_2 = \langle 2,7 \rangle \cup \langle -3, 2 \rangle = \langle -3, 7 \rangle$

$P = \langle -3, 7 \rangle$

Cvičení:

Př: Sestrojte grafy fcí:

$f_1: \; y = 3|x-3|$ $\quad x \in R$

$f_{2:} \; y = |x| + x$ $\quad x \in R$

$f_3: y = |4-x|$ $\quad x \in R$

$f_{4:} \; y = |x| - x$ $\quad x \in R$

$f_{5:} \; y = x - |x|$ $\quad x \in R$

$f_{6:} \; y = \dfrac{x}{|x|}$ $\quad x \in R - \{0\}$

př: $|x+3| = 6$ $\qquad$ $|7-4x| < 5$

$|5-2x| = 7$ $\qquad$ $|x+8| > 9$

$|x-4| \leq 0$ $\qquad$ $|3-x| \geq 5$

př: $n+1 < |n|$ $\qquad$ $|3n-9| = 4n-5$ $\qquad$ $2|3n-6| = n+2$

př: $|x-7| + 4x = |2x-5|$

$|2x+1| - x = 3 - |2x-1|$

$|x+2| - x \geq 3 - |x-3|$

2.5. Soustava lineárních nerovnic

př: a) $\dfrac{4x-5}{7} < x + 3$ $\qquad$ b) $\dfrac{3x+8}{4} \geq 2x-5$

$4x - 5 < 7x + 21$ $\qquad$ $3x + 8 \geq 8x - 20$

$-3x < 26$ $\qquad$ $-5x \geq -28$

$x > -\dfrac{26}{3}$ $\qquad$ $x \leq \dfrac{28}{5}$

$P_1 = \left(\frac{26}{-3}\right), +\infty)$ $\quad$ $P_2 = (-\infty, \frac{28}{5}\rangle$

$P = P_1 \cap P_2$

$P = (-\frac{26}{3}, \frac{28}{5}\rangle$

=============

Př: (2x – 3).(5 -3x) >0 $\quad x \in R$

1) 2x – 3 > 0 $\quad$ a zároveň $\quad$ 5 - 3x > 0
2) 2x – 3 < 0 $\quad$ a zároveň $\quad$ 5 – 3x < 0

a) 2x – 3 > 0 $\quad$ 5 - 3x > 0

$x > \frac{3}{2}$ $\quad$ -3x > -5

$x < \frac{5}{3}$

$P_1 = (\frac{3}{2}, +\infty)$ $\quad$ $P_2 = (-\infty, \frac{5}{3})$

$P = P_1 \cap P_2 = (\frac{3}{2}, +\infty) \cap (-\infty, \frac{5}{3}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$

======

b) 2x – 3 < 0 $\quad$ 5 – 3x > 0

$x < \frac{3}{2}$ $\quad$ $x > \frac{5}{3}$

$P_3 = (-\infty, \frac{3}{2})$ $\quad$ $P_4 = (\frac{5}{3}, +\infty)$

$P_3 \cap P_4 = (-\infty, \frac{3}{2}) \cap (\frac{5}{3}, +\infty) = \emptyset$

$P = (P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4)$

$P = (\frac{3}{2}, \frac{5}{3}) \cup \emptyset$

$\boldsymbol{P = (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})}$

=========

Cvičení:

1.př. Řešte soustavy nerovnic

a) $3u - 10 > 0$

$\frac{16}{4}u - 51 < 6$

b) $7u - 2 > 6 - 4u$

$7u - 11 > u - 3$

c) $\frac{1}{3}(2u-3) \le \frac{1}{6}(5+4u)$

$\frac{1}{5}(3+4u) \le u + 6$

d) $\frac{u}{7} + \frac{3u-5}{2} \le \frac{5-2u}{2}$

$\frac{1}{4}(3-2u) \ge 1{,}5 - \frac{u}{6}$

2.př

a) (6-x) . (5x – 2)≤ 0

b) (2x – 3). (7 - 3x) > 0

3.př:

a) $\frac{4-x}{2x-3} \rangle 0$

b) $\frac{9-2x}{5-4x} \le 0$

c) $\frac{2x-1}{3-x} \ge 2$ (upravit $\frac{2x-1}{3-x} - 2 \ge 0$)

2.6. Soustava lineárních rovnic o více neznámých

př: Najděte všechny uspořádané dvojice [x, y] reálného čísla pro které platí:

y = 2x-1 a zároveň

y = -x +5

Průsečík přímek y = 2x -1 a y = -x + 5 je bod A [2, 3], tzn. x = 2, y = 3

Početně: 2x – 1 = -x + 5

3x = 6

x = 2

======

y = 2.2-1

y = 3

=======

A: Metoda dosazovací :

1. Jednu rovnice převedeme na tvar y = ax + b (nebo x = cy + d)
2. Do druhé rovnice dosadíme za y výraz ax + b (nebo za x výraz cy + d) a vyřešíme ji - neznámá x (y)
3. Dosadíme číslo za x (y) do kterékoliv rovnice a vypočteme y (x)

B: Metoda sčítací (adiční)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ \underline{x - 5y} &\underline{= -3 \quad /.(-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ \underline{-\ 3x + 15y} &\underline{= 9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y + 15y &= 8+9 & \qquad 3x + 2 &= 8 \\ 17y &= 17 & 3x \quad &= 6 \\ y &= 1 & x &= 2 \end{aligned}$$

=======   =========

1. Každou rovnici soustavy vynásobíme vhodným číslem různým od nuly tak, aby koeficienty u x nebo u y byly opačná čísla.
2. Levé i pravé strany sečteme a získáme tím rovnici o jedné neznámé.
3. Jako u předešlého.

C: Metoda srovnávací (komparační)

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{3}{5} = -\frac{3}{2}x + 4 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{x=2,\ y=1}$$

1. Z obou rovnic vyjádříme neznámou
2. Dosadíme a vyřešíme
3. Dosadíme a vyřešíme pro druhou neznámou

Cvičení:

př:1
$$\frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} = x+1$$
$$\frac{2x-3}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y+1$$

$$\left[\ x = \frac{9}{17}\ ,\quad y = -\frac{4}{7}\ \right]$$

př: 2a) $2x + y = 7$, $\underline{3x - 4y = -6}$ b) $x + 3y = 5$, $\underline{-2x + y = 1}$ c) $2x - y = 0$, $\underline{3y - 1 = 0}$

př: 3 $5.(y + 2) = -3 (x -3) + 7$

$\underline{3.(y + 2) +23 = 5(x – 3}$

[x = , y =]

Cvičení:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= -7 \\ x + y + 2z &= 4 \\ \underline{- 2x + y - 6z} &\underline{= 6} \end{aligned}$$

[x = 2, y = 4, z = 1]

3. ODMOCNINY A MOCNINY

3.1. n – té odmocniny nezáporného čísla

Definice: n-tá odmocnina (n∈ N) z nezáporného reálného čísla a (a = ≥0, a ∈ R) je takové nezáporné číslo x (x ≥ 0, x ∈ R) pro která platí

$$x^n = a$$

zápis: x = $\sqrt[n]{a}$ a – odmocněnec (základ odmocniny)

n – odmocnitel

př: $\sqrt[3]{8} = 2$ $2^3 = 8$

$\sqrt[4]{16} = 2$ $2^4 = 16$ $2^5 = 32$

př: Kdy má výraz smysl?

$\sqrt[n]{-a}$, $\sqrt[5]{32} = 2$ $\sqrt[n]{a.b}$

$-a \geq 0$ $a.b \geq 0$

$a \leq 0$ 1) $a \geq 0$ 2) $a \leq 0$

============ $b \geq 0$ $b \leq 0$

3.2. Počítání s odmocninami

Pro $a \geq 0, \quad b \geq 0$

m, n, p - celá kladná

1) $\sqrt[n]{a}. \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $b \neq 0$

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

5) $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a}$

př: $\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[3]{2^5} =$ $\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}.\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} =$

$\sqrt{ax}.\sqrt{\dfrac{a}{x}} =$ $a \geq 0$

$x > 0$

$\sqrt[3]{a^2 b^{-1}}.\sqrt[3]{a.b}^{-2}$ = $\qquad a \geq 0$

$b > 0$

Definice: částečné odmocňování je úprava odmocniny do tvaru součinu, jehož jedním činitelem je odmocnina co nejmenšího odmocněnce.

1) $\sqrt[3]{81}$ $\qquad$ 2) $\sqrt{ab^2}$ $\quad a \geq 0$, $b \geq 0$ $\qquad$ 3) $\sqrt[3]{32xy}^4$ $\quad x \geq 0$, $y \geq 0$

4) $\sqrt[3]{x^{12}.y^{10}.z^8}$ $\quad x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

př: $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} =$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} =$ $\qquad \dfrac{\sqrt{a^3 b}}{\sqrt{a^2 b^3}} =$ $\quad a > 0$, $b > 0$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{x^{-5}.y^7}}{\sqrt[3]{xy^4}} =$ $\quad x > 0$, $y > 0$

př: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^8$ $\qquad \left(\sqrt[6]{4}\right)^3$ $\qquad \left(\sqrt[5]{a^3}\right)^4$ $\quad a \geq 0$

př: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}$ $\qquad \sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}^2}$ $\quad x > 0$

3.3. Usměrňování zlomků

je odstraňování odmocniny ze jmenovatele rozšířením zlomku.

Např: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ rozšíříme $\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ rozšíříme $\sqrt{3}-1$

$\dfrac{1}{1-\sqrt{5}}$ rozšíříme $1 + \sqrt{5}$

$\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ rozšíříme $\sqrt[5]{x^3}$

3.4. Mocniny s racionálním mocnitelem

mocniny s celočíselným mocnitelem již známe

$a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad$ m – celé, n – kladné

Definice: pro každé kladné reálné číslo a, celé číslo m a kladné přirozené číslo n

je $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad$ a - základ mocniny

$\frac{m}{n}$ - mocnitel

př: $\sqrt[4]{a^{-20}} = \sqrt[4]{\left(a^{-5}\right)^4} = a^{-5}$

$\sqrt[4]{a^{-20}} = a^{-\frac{20}{4}} = a^{-5}$

podmínky: x>0, x $\neq$ 1, x $\neq$ -1

př: $$\left[\frac{(x-1)^{-1}}{x^{-3}} - (1-x)^{-1}\right] . \frac{x^0 + x(x-2)}{x^2 - x + 1} : \left[\frac{1}{(x+1)^{-2}}\right]^{\frac{1}{2}} = x - 1$$

př: $$\left(\sqrt[4]{\frac{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}\right)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{16}}$$ podmínka x >0

4. KVADRATICKÉ FUNKCE, KVADRATICKÁ ROVNICE A NEROVNICE

4.1. Kvadratická fce, graf

Užití: M: $S_0 = \pi . r^2$, $S_0 = a^2$

$F: s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ - dráha vrhu svislého vzhůru

$P = RI^2$ výkon = odpor . (intenzita)^2

definice: Kvadratická fce se nazývá každá fce

$y = ax^2 + bx + c, \qquad x \in R$

kde a je reálné číslo různé od nuly b, c jsou libovolná reálná čísla

$ax^2 + bx + c$ - kvadratický trojčlen $a \neq 0$

ax^2 - kvadratický člen

bx - lineární člen

c - absolutní člen

Graf:

Př: Narýsujte graf fce $h: y = x^2$

př: $g_1 : y = 2x^2$ $g_2 : y = -2x^2$

$h_1 : y = \frac{1}{3}x^2$ $h_2 : y = -\frac{1}{3}x^2$

Věta: Graf každé kvadratické fce $y = ax^2$ je souměrný podle osy y kartézské soustavy souřadnice 0 xy.

Věta: Graf každé kvadratické fce $y = ax^2$ prochází bodem [0,0].

Věta: Je-li a >0, pak kvadratická fce $y = ax^2$ nabývá pro $x = 0$ nejmenší hodnoty, je-li a <0, nabývá kvadratická fce $y = ax^2$ pro $x = 0$ největší hodnoty.

Věta: Graf každé kvadratické fce $y = ax^2 + bx + c$ lze získat posunutím grafu kvadratické fce $y = ax^2$

Věta: Graf kvadratické fce $y = ax^2 + bx + c$ se nazývá parabola, bod $[x_{0,} y_0]$ se nazývá vrchol paraboly.

Věta: Vrchol paraboly, která je grafem kvadratické fce $y = ax^2 + bx + c$, má souřadnice

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$$

př: Určete vrchol paraboly, která je grafem kvadratické fce $y = x^2 + 2x - 2$

$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{21} = -1$$

$$y_0 = c - \frac{b^2}{4a} = -2 = \frac{2^2}{4.1} = -3$$ V = [-1, -3]

př: Určete souřadnice vrcholu paraboly, které jsou grafem kvadratické fce.

a) $y = 2x^2$ b) $y = 2x^2 - 6x + 5{,}5$ c) $y = -x^2 - 4x - 3$

V= [0,0] V= [1,5 , 1] V=[-2,1]

Postup při sestrojování grafů kvadratických fcí:

1) Určíme souřadnice $x_{0,}y_0$ vrcholu paraboly
2) Vypíšeme několik dalších dvojic
3) Sestrojíme v 0 xy (kartézské soustavy souřadnic) obrazy uspořádaných dvojic získaných v 1 a2
4) Sestrojíme parabolu (parabola je souměrná podle přímky, která je rovnoběžná s osou y a prochází bodem [$x_{0,}y_0$]

Věta: Graf kvadratické fce je souměrný podle přímky, která je rovnoběžná s osou y a prochází bodem [$x_{0,}y_0$].

Věta: Kvadratická fce $y = ax^2 + bx + c$, nabývá pro x_0

a) nejmenší hodnotu y_0 - jestliže a >0
b) největší hodnotu $y = 0$ - jestliže a <0

Cvičení narýsujte grafy funkcí:

Př: $y = -0{,}5^2 + 3x$ V = [3,4,5]

$y = x^2 - 2x - 3$ V= [1,-4]

$y = x^2 - 3$

$y = x^2 - 3\text{x}$

$y = -0{,}25x^2 + 1$

$y = x^2 + 7x + 10$

$y = 0{,}5x^2 - 2{,}5x + 3$

$y = -x^2 + 2x - 4$

4.2. Kvadratická rovnice, diskriminant

Definice: Kvadratická rovnice o jedné neznámé x se nazývá každá taková rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na tvar

$ax^2 + bx + c = 0$ kde a je reálné číslo různé od nuly, b, c libovolná reálná čísla.

př: $-0{,}5x^2 + 3x = 0$

$x(-0{,}5x + 3) = 0$ - součin dvou čísel je roven nule, jestliže jedno z čísel je rovno 0.

$x = 0$ $\qquad (-0{,}5x + 3 = 0)$

$x = 6$

$P = \{0{,}6\}$

==========

př: $x^2 - 2 = 0$ $\qquad A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$

$(x^2 - \sqrt{2}).(x + \sqrt{2}) = 0$

$x - \sqrt{2} = 0$ $\qquad x + \sqrt{2} = 0$

$x = \sqrt{2}$ $\qquad x = -\sqrt{2}$

$P = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

============

př: $2x^2 + 3 = 0$

$x^2 \geq 0$

$2x^2 \geq 0$

$2x^2 + 3 > 0$ $\qquad P = \emptyset$

př: $(x - 1)^2 = 0$

$(x - 1)^2 \geq 0$ $\qquad$ je-li $x = 1$ $\qquad (x - 1)^2 = 0$

je-li $x \neq 1$ $\qquad (x - 1)^2 > 0$

$P = \{1\}$

Cvičení:

př: $(x-2)(x-1)=0$

$(5-3x)(-2x-5)=0$

$(x+3)(2x-5)=0$

př: $x^2+3x=0$

$2x^2-9x=0$

př: $v^2-4=0$

$v^2-7=0$

př: $(u-2)^2=0$

$(u-5)^2=0$

4.3. Vzorec pro kořeny kvadratické rovnice

$ax^2+bx+c=0$

Diskriminant kvadratické rovnice

$D=b^2-4ac$

kořeny: $x^1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$x^2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

<u>Věta:</u> pro množiny P všech kořenů kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ o neznámé $x\in$ R platí:

1) Je-li diskriminant $D<0$, pak $P=\emptyset$
2) Je-li diskriminant $D=0$, pak $P=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
3) Je-li diskriminant $D>0$, pak $P=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right\}$

př: $2x^2+6x+5=0$ $a=2$, $b=6$, $c=5$

$D=-4<0$

$P=\emptyset$

př: $2x^2+6x+4{,}5=0$ $a=2$, $b=6$, $c=4{,}5$

$D=0$ $x=1{,}5$

$P=\{-1{,}5\}$

př: $2x^2+6x+4=0$ $a=2$, $b=6$, $c=4$

$D=4$ $x_1=-2$

$x_2=-1$

$P=\{-2,-1\}$

\+ ZKOUŠKY !!!!

4.4. Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

<u>1. Věta</u>: Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ o neznámé $x\in$ R, pak pro ně platí:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

<u>Obrácená věta:</u>

<u>2. Věta</u>: Nechť a je reálné číslo různé od nuly, b, c libovolná reálná čísla. Čísla x_1, x_2, pro která platí $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1.x_2=\frac{c}{a}$ jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ o neznámé $x\in$ R.

<u>3. Věta</u>: jsou-li x_1, x_2, kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ o neznámé $x\in$ R, pak platí $ax^2+bx+c=0=a(x-x_1)(x-x_2)$

př: $x_2-7x+12=0$

$$x+x_1=-\frac{b}{a}=-(-7)=7$$

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}=12$$

rozepíšeme: 7= 0+7 = 1+6 = 2+5 = <u>3+4</u>= -3+10 = -2+9=

12=1 .12 = 2.6 = <u>3.4</u> =

$P=\{3,4\}$

př: Rozložte kvadratický trojčlen $10\,x_2 - 11x + 3$ na součin lineárních činitelů.

$a = 10, \quad b = -11, \quad c = 3$

$$x_1 = \frac{3}{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 1}{20}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Podle věty 3: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1).(x - x_2)$

$$10\,x^2 - 11x + 3 = 10.\left(x - \frac{3}{5}\right).\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

4.5. Kvadratické nerovnice

Definice: Kvadratickou nerovnicí o jedné neznámé x se nazývá každá nerovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na jeden z tvarů:

$ax^2 + bx + c > 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c \geq 0$

$ax^2 + bx + c < 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c \leq 0$

př : $x^2 + 3x + 3 \geq 2x + 9$

$x^2 + x - 6 \geq 0$

1) Vyřešíme kvadratickou rovnici $x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = 2, \quad x_2 = -3$

2) Nyní vezmeme na pomoc znalosti o průběhu kvadratické funkce $m : y = x^2 + x - 6$

$a = 1$, tedy $a > 0$, grafem je parabola, jejíž vrchol zobrazuje nejmenší hodnotu funkce.

Této parabole přísluší body [2,0] , [-3,0]

Řešení je tedy $P = (-\infty, -3\,\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

př: $0{,}5\,x^2 - x + 1{,}5 < 0$ $\qquad$ $a = 0{,}5, \quad b = -1, \quad c = 1{,}5$

$0{,}5x^2 - x + 1{,}5 = 0$ $\qquad$ $D = -2 < 0$ Rovnice nemá řešení

$\Rightarrow$ Parabola nemá žádné společné body s osou x.

Mohou nastat tyto případy:

a) Celá parabola leží pod osou x
b) Parabola leží nad osou x

K určení jednoho z těchto dvou případů stačí dosadit do zadání za x libovolné reálné číslo a zjistit, zda hodnota trojčlenu je kladná nebo záporná.

Např: $x = 0$ $\qquad 0{,}5x^2 - x + 1{,}5 = 1{,}5$

$\Rightarrow$ pro všechna $x \in R$ je $\quad 0{,}5x^2 - x + 1{,}5 > 0$

Ale řešíme $\; 0{,}5x^2 - x + 1{,}5 < 0$

$\Rightarrow \quad P = \emptyset$ - množina řešení je prázdná

4.6. Grafické řešení

př: $-2x^2 + 13x > 0$

$-2x^2 + 13x - 15 > 0$

Řešíme kvadratickou rovnici

$-2x^2 + 13x - 15 = 0$

$a = -2,\; b = 13,\; c = -15 \qquad D = b^2 - 4ac = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 7}{-4} \left\langle {}^{\frac{3}{2}}_{+5} \right.$$

podle věty 3: $-2x^2 + 13x - 15 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right).(x - 5)$

Místo původní nerovnice řešíme tedy:

$$-2\left(x - \frac{3}{2}\right).(x-5) > 0 \qquad /.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right).(x-5) < 0$$

1) $x - \frac{3}{2} > 0$ a zároveň $x - 5 < 0$

$x > \frac{3}{2}$ a zároveň $x < 5$

$P_1 = \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \qquad P_2 = (-\infty, 5)$

$$P_1 \cap P_2 = \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \cap (-\infty, 5) = \left(\frac{3}{2}, 5\right)$$

2) $x - \frac{3}{2} < 0$ a zároveň $x - 5 > 0$

$x < 0$ a zároveň $x > 5$

$P_3 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ $P_4 = (5, +\infty)$

$P_3 \cap P_4 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap (5, +\infty) = \emptyset$

$(P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4) = \left(\frac{3}{2}, 5\right) \cup \emptyset$

$P = \left(\frac{3}{2}, 5\right)$

př.: (k - 3).(k – 1) $\geq$ 0

1) $k - 3 \geq 0$ a zároveň $k - 1 \geq 0$

$k \geq 3$ a zároveň $k \geq 1$

$P_1 = \langle 3, \infty)$ $P_2 = \langle 1, \infty)$

$P_1 \cap P_2 = \langle 3, \infty) \cap \langle 1, \infty) = \langle 3, \infty)$

2) $k - 3 \leq 0$ a zároveň $k - 1 \leq 0$

$k \leq 3$ a zároveň $k \leq 1$

$P_3 = (-\infty, 3\rangle$ a zároveň $P_4 = (-\infty, 1\rangle$

$P_3 \cap P_4 = (-\infty, 3\rangle \cap (-\infty, 1\rangle = (-\infty, 1\rangle$

$P = (P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4) = (-\infty, 1\rangle \cup \langle 3, \infty)$

Cvičení:

1) $x^2 - 4 \geq 0$

2) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

3) $2x^2 - 5x + 2 < 0$

4. $2x^2 - 6x + 9 > 0$

5. $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$

5. FUNKCE

5.1. Funkce rostoucí a klesající

Definice: Nechť M je podmnožinou množiny R všech reálných čísel. Funkce f se nazývá každá množina uspořádaných dvojic $[x, y] \in MxR$ (kartézský součin) pro kterou platí: ke každému $x \in R$ existuje právě jedno $y \in R$ tak, že $[x, y] \in f$

Jinak:

Definice: Fce je pravidlo,pomocí kterého je každému reálnému číslu x přiřazeno právě jedno reálné číslo y.

Platí věty:

1) Konstantní funkce $y = b$ není ani rostoucí ani klesající. Grafem je přímka rovnoběžná s osou x.
2) Lineární *fce* $y = ax + b$ je: a) pro každé a >0 rostoucí
   b) pro každé a <0 klesající
3) Kvadratická *fce* $y = ax^2 + bx + c$ je:

   a) pro $a > 0$ rostoucí v intervalu $\langle -\frac{b}{2a}, \infty)$

   klesající v intervalu $(-\infty, -\frac{b}{2a}\rangle$

   b) pro $a < 0$ rostoucí v intervalu $(-\infty, -\frac{b}{2a}\rangle$

   klesající v intervalu $\langle -\frac{b}{2a}, +\infty)$

5.2. Nepřímá úměrnost

Definice: Nepřímá úměrnost se nazývá každá funkce $y = \frac{k}{x}$, $x \in R - \{0\}$,kde k je libovolné reálné číslo různé od nuly.

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola.

Platí věty:

1) Funkce $y=\frac{k}{x}$, je: a) pro každé $k>0$ klesající v intervalech $(-\infty,0)$,

$(0,+\infty)$, hyperbola je v I. a III. kvadrantu.

b) pro každé $k<0$ rostoucí v intervalech $(-\infty,0)$,

$(0,+\infty)$, je hyperbola ve II. a IV. kvadrantu.

2) Obor funkčních hodnot funkce $y=\frac{k}{x}$, je pro každé $k\neq 0$ roven $R=\{0\}$.

5.3. Mocninné funkce

Opakování: n – celé kladné číslo $x.x..-x \;=x^n$

$n=0,\quad x\neq 0 \quad x^0 =1$

n – celé záporné číslo, $x\neq 0 \quad x^n =\frac{1}{x^{-n}}$

Známe: $y=x^1,\; y=x^2\;,\; y=x^0$ pro $x\neq 0$

Rozdělení: a) $y=x^n$ $x\in R, n$ celé kladné číslo

b) $y=x^0$ $x\in R-\{0\}$

c) $y=x^n$ $x\in R-\{0\}$, n celé záporné

a) $y=x^n$ $x\in R, n$ celé kladné číslo

Věta: Pro každé liché celé kladné číslo n je fce $y=x^n$ rostoucí a její obor hodnot je množinou všech reálných čísel.

Pro každé sudé celé kladné číslo n je fce $y=x^n$ klesající v intervalu $(-\infty,0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle,+\infty)$, její obor hodnot je interval $\langle 0,+\infty)$

b) $y=x^0$ $x\in R-\{0\}$

$x^0 =1 \;\Rightarrow\; y=1$ ale $x\neq 0$

Je to graf konstantní funkce s výjimkou bodu pro $x=0$.

c) $y=x^n$ $x\in R-\{0\}$, n celé záporné

$y=x^{-1}$ známe $y=\frac{1}{x}$ nepřímá úměrnost

$y_1=x^{-2}$ $y_3 =x^{-1}$ samozřejmě $x\neq 0$

$y_2 =x^{-4}$ $y_4 =x^{-3}$

Věta: Pro každé záporné celé číslo n sudé je funkce $y = x^n$ rostoucí v intervalu $(-\infty,0)$, a klesající v intervalu $(0,+\infty)$, obor hodnot je množina $R+$.

Pro každé záporné celé číslo n liché je funkce $y = x^n$ klesající v intervalech $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$. Obor hodnot je množina $R-\{0\}$.

Cvičení: $y = 0{,}5x^3$ $\qquad$ $y = x^4 - 1$

$y = -2x^5$ $\qquad$ $y = x^{-2} + 2$

$y = 0{,}1x^{-4}$ $\qquad$ $y = x^{-6}$

5.4. Exponenciální funkce

Definice: Nechť a je kladné reálné číslo různé od 1. Exponenciální funkce o základu a se nazývá funkce $y = a^x$ $\quad x \in R$

př: $y_1 = 2^x$

$$y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Věta: 1. Obor hodnot funkce $y = a^x$ je pro každé $a > 0$, $a \neq 1$, interval $(0,+\infty)$.

2. Fce $y = a^x$ je pro každé $a > 1$ rostoucí, pro každé $a \in (0,1)$ klesající.

3. V bodě 0 je hodnota $fce\ y = a^x$ pro každé $a > 0$ rovno 1.

4. a) Pro každé $a > 1$ platí: je-li $x < 0$, pak $a^x < 1$,

je-li $x > 0$, pak $a > 1$.

b) Pro každé $a \in (0,1)$ platí:je-li $x < 0$ pak $a^x > 1$,

je-li $x > 0$, pak $a^x < 1$,

Cvičení: $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\qquad$ $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$y = 1{,}5^x$ $\qquad$ $y = 2^x - 1$

$y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ $\qquad$ $y = 2.(0{,}25)^x$

5.5. Exponenciální rovnice

vyskytují se zde mocniny s neznámou v exponentu.

Věta: Pro všechna reálná čísla x, y a pro každé kladné reálné číslo $a \neq 1$ platí:

je-li $a^x = a^y$ pak je $x = y$.

př: $5^{5-x} = 5^{3x-3}$

5-x= 3x-3

-4x=-8

<u>x=2</u>

př: $\frac{1}{3^{5-2^n}} = 81$

$3^{-(5-2n)} = 3^4$

-(5-2n) = 4

2n=9

<u>n=4,5</u>

<u>Cvičení:</u>

$5^{3x-1} = 1$	$3^x = 9$
$1 = 2^{x^2-4x}$	$4^{-x} = 64$
$0{,}4^{3-2x} = 1$	$5^x = 125$
$0{,}25^x = 16$	$2^x = 0{,}5$
$\frac{1}{81} = 3^x$	$4^{5-x} = 4^{x+3}$
$625 = 5^{-x}$	$10^x = 1$
$(16)^x = (0{,}25)^{x^2}$	$100^x = 0{,}01$
$\left(\frac{1}{125}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} .5^x$	$10^x = 1000$
	$0{,}01^x = 10000$
	$0{,}01^x = 100000$
	$0{,}1^x = 0{,}01$

5.6. Inverzní funkce

př: Narýsujte inverzní funkci
k funkci $y = 2x + 1$

x	0	1	- 1
y	1	3	- 1

u inverzní funkce

$x = 2y + 1$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

V tabulce totéž

x	1	3	- 1
y	0	1	- 1

5.7. Logaritmické funkce

Definice: Nechť a je kladné reálné číslo různé od 1, f exponenciální funkce o základu a

(tj: $y = a^x$)

Logaritmická funkce o základu a se nazývá taková funkce g pro kterou platí:

$[d, c] \in g$ právě tehdy, když $[c, d] \in f$.

Věta: Graf funkce g je souměrně sdružený s grafem funkce f podle osy 1. a 3. kvadrantu kartézské soustavy souřadnic.

$y = \log a^x$ Čteme logaritmus x při základu a

je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$

Věta: 1) Definiční obor logaritmické funkce $y = \log a^x$ je pro každé $a \in$ R$^+ - \{1\}$ roven intervalu (0, $+\infty$)

2) Obor hodnot logaritmické funkce $y = \log a^x$ je pro každé $a \in$ R$^+ - \{1\}$ roven množině R všech reálných čísel

3) Funkce $y = \log a^x$ je a) pro každé $a > 1$ rostoucí

b) pro každé $a \in$ (0,1) klesající

4) $\log a\, 1 = 0$

5) a) pro $a > 1$: je-li $x < 1$, pak $\log a < 0$

je-li $x > 1$, pak $\log a > 0$

b) pro $a \in$ (0,1): je-li $x < 1$, pak $\log a > 0$

je-li $x > 1$, pak $\log a < 0$

př: $\log_2 x < \log_2 4$

$\log_{0,6} 5 \leq \log_{0,6} x$

5.8. Logaritmus

Definice: Logaritmus x o základu a je takové číslo y pro něž platí: umocníme-li jím číslo a, dostaneme x, přitom $a \in$ R$^+ - \{1\}$, $x \in R^+$

$\log_a x = y$ právě když $a^y = x$

Věta: 1. pro každé $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$, $x \in R^+$ platí: $x = a^{\log_a x}$

2. pro každé $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$ platí: a) $\log_a a = 1$

b) $\log_a 1 = 0$

př:

1) $\log_7 49 = 2$ 3) $\log_6 t = 2 \quad \Rightarrow t = 6^2 = 36$

2) $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ 4) $\log_a 10000 = 4 \quad \Rightarrow a^4 = 10^4 \Rightarrow a = 10$

př: $\log_{10} x =$ $x = 1, 10, 10^5, \frac{1}{1000}, 10^{-9}$

př: $3^{\log_3 2} = 2$ - dle 1. věty

$10^{\log_{10} 10} = 10$ - dle 1. věty

př: $\log_a 25 = 2$ $a = 5$

$\log_a 81 = 4$ $a = 3$

$\log_a 8 = -3$ $a = \frac{1}{2}$

5.9. Věty pro počítání s logaritmy

1) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

Logaritmus součinu dvou kladných čísel je roven součtu logaritmů jednotlivých činitelů.

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Logaritmus podílu kladných čísel je roven rozdílu logaritmů dělence a dělitele (v tomto pořadí)

3) $\log_a x^y = y.\log_a x$

Logaritmus mocniny kladného čísla je roven součinu exponentu a logaritmu základu mocniny.

př: $\log_{0,5} 6 + \log_{0,5} \frac{4}{6} = \log_{0,5}\left(6.\frac{4}{6}\right) = \log_{0,5} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

př: $4.\log_6 3 + 5.\log_6 2 - \log_6 12 = \log_6 \frac{3^4.2^5}{12} = \log_6\left(3^3.2^3\right) = \log_6\left(6^3\right) = 3$

př: $\log_{10} 20 + \log_{10} 50 =$

$\log_{0,1} 20 = \log_{0,1} 0,2 =$

$\log_3 7 + \log_3 \frac{81}{7} =$

$\log_5 50 - \log_5 2 =$

$\log_4 4^{-0,5} =$

$\log_3 9^{2,5} =$

<u>Poznámka</u>

$$\log_{10} m = \log_{10}\left(m_1 . 10^c\right) = \log_{10} m_1 + c$$

Logaritmus každého kladného čísla m o základu 10 lze psát ve tvaru součtu $\log_{10} m_1$, kde $m_1 \in \langle 1{,}10)$ a celého čísla c.

Je zřejmé, že $\log_{10} m_1 \in \langle 0{,}1)$

5.10. Logaritmické rovnice

<u>Věta</u>. Pro každé kladné reálné číslo a různé od jedné a pro všechna kladná reálná čísla x, y platí: je-li $\log_a x = \log_a y$, pak $x = y$.

př: $\log_{10}(x+2) - \log_{10}(x-1) = \log_{10} 100 - \log_{10} 4$

$$\log_{10} \frac{x+2}{x-1} = \log_{10} \frac{100}{4}$$

$$\frac{x+2}{x-1} = 25$$

$$x + 2 = 25x - 25$$

$$x = \frac{9}{8} \qquad\qquad + \text{ zkouška}$$

========

Poznámka – ukázat, je-li místo $\log_{10} 100 = 2$

př: $2\log_7(x-1) = 0{,}5.\left(\log_7 x^5 - \log_7 x\right)$

$$\log_7 (x-1)^2 = \log_7 x^2$$

$$(x-1)^2 = x^2$$

$$-2x + 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$x = \frac{1}{2}$ nebo $\underline{x = 0{,}5}$

========

Zkouška: $L_{(0,5)} = 2.\log_7(0{,}5-1) = 2.\log_7(-05)$!!!

$(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1$, číslo 0,5 není kořenem rovnice

Množina kořenů rovnice je prázdná.

Rovnice jde upravit i jinak: $2.\log_7(x-1) = 0{,}5.\log_7 x^4$

$$2.\log_7(x-1) = 2.\log_7 x$$

$$x - 1 = x$$

<u>-1 = 0 !!</u> Nemá řešení…

př: $(\log_{10} x)^2 + 2\log_{10} x - 3 = 0$

substituce $\log_{10} x = y$

$\Downarrow$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$y_{1,2} = \langle {}^{1}_{-3}$

a) $\log_{10} x = 1$

$x = 10$

b) $\log_{10} x = -3$

$x = 10^{-3}$

+ zkouška

Množina všech kořenů $P = \{10, 10^{-3}\}$

př: $2+3^x = 3^{x+2}$

$2+3^x = 3^x.3^2$

$2+3^x = 3^x.9$

$2 = 3^x.9-3^x$

$2 = 3^x(9-1)$

$2 = 8 \,.\, 3^x$

$3^x = \frac{2}{8}$

$3^x = \frac{1}{4}$

$3^x = 0{,}25$

$\log_{10} 3^{x} = \log_{10} 0{,}25$

$x.\log_{10} 3^x = \log_{10} 0{,}25$

$x.\log_{10} 3 = \log_{10} 0{,}25$

$x = \frac{\log_{10} 0{,}25}{\log_{10} 3}$

==============

př: $\log_4 x = 0{,}5.\log_4 11$

$\log_{0,5} x = \log_{0,5} 4 + \log_{0,5} \sqrt{7}$ -0,5.$\log_{0,5} 1$ [4, $\sqrt{7}$

$\log_{10}(x+4) = \log_{10}(3x-1)$

$\log_5(4-3x) = 0$

$\log_9(x^2-1) = 1$

$\log_7(y+3) - \log_7(y+1) = \log_7(y-3)$

$\log_2(y+2) + \log_2(y+14) = 6$

$2 - \log_{10} 5 = \log_{10} y$

$(\log_3 x)^2 = 3.\log_3 x - 10 = 0$ substituce

$(\log_5 x)^2 - 2\log_5 x = -1$ ___,,____

$2^x = 100$ nejdříve logaritmovat

$5^{x-2} = \frac{10}{3}$ ____,,____

$5^{3-x} = 3^{2x-1}$ ____,,____

5.11. Přirozené a dekadické logaritmy

Hledá se takové číslo e, aby graf exponenciální funkce $y = e^x$ měl s osou I. A III. kvadrantu jediný společný bod.

$e \doteq 2{,}718$ Eulerovo číslo

Logaritmickou *fci* při základu e značíme $y = \log_e x$ obvykle $\ln x$

hovoříme o <u>přirozeném logaritmu</u>

Je-li základ 10 $\rightarrow$ <u>dekadický logaritmus</u>

$$\begin{matrix} \ln 10 \doteq 2{,}30 \\ \log_e \doteq 0{,}43 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \ln x \doteq 2{,}30.\log x$$

$$\log x \doteq 0{,}43.\ln x$$

<u>Věta:</u> Pro každé kladné reálné číslo x a pro všechna kladná čísla y, z různá od jedné platí:

$$\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$$

př: Vypočtěte $\log_2 5$

je-li: a) $\log_{10} 2 \doteq 0{,}301$, $\log_{10} 5 \doteq 0{,}699$

b) $\ln 5 \doteq 1{,}609$ $\ln 2 \doteq 0{,}693$

a) $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \dfrac{0{,}699}{0{,}301} \doteq 2{,}322$

b) $\log_2 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \dfrac{1{,}609}{0{,}693} \doteq 2{,}322$

6. GONIMETRIE A TRIGONOMETRIE

6.1. Úhel a jeho velikost

stupňová míra - 1^0 = plný úhel : 360
oblouková míra - 1 rad (radián)

360^0 ……… 2π rad
1 rad $\doteq 57^0 17' 45''$

$$x = \frac{\alpha . \pi}{180} \qquad\qquad \alpha = \frac{x.180}{\pi}$$

převod stupně na radiány převod radiány na stupně

Věta: Zobrazení U množiny R do jednotkové kružnice je dáno:

1. Každému reálnému číslu $x_0 \in \langle 0, 2\pi)$ přiřadíme bod $K \in k,$ pro který platí:

   a) Úhel JOK je částí úhlu JOJ_1 jako svou část (pro $x_0 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$)

   nebo obsahuje úhel JOJ_1 jako svou část (pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, 2\pi))$

   b) Délka oblouku JK je rovna x_0, vzhledem k tomu že k je jednotková kružnice, je x_0 zároveň číselnou hodnotou velikosti úhlu JOK v obloukové míře.

2. Je-li $x \in R - \langle 0, 2\pi),$ najdeme nejprve takové $x_0 \in \langle 0, 2\pi)$ a takové $m \in Z$, pro něž platí $x_0 \in x_0 + m.2\pi.$

   Potom přiřadíme číslu x stejný bod $K,$ jaký je přiřazen číslu x_0.

6.2. Definice goniometrických funkcí

Definice: *Fce* sinus se nazývá *fce*, které patří právě všechny uspořádané dvojice

$[n, y_k]$, kde $n \in R$

$y = \sin x$

Definice: *Fce* kosinus se nazývá *fce*, které patří právě všechny uspořádané dvojice

$[n, x_k]$, kde $n \in R$

$y = \cos x$

Definice: *Fce* tangens se nazývá *fce* daná rovnicí

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Definice: *Fce* kotangens se nazývá *fce* daná rovnicí

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

6.3. Určování hodnot goniometrických funkcí

1) Tabulky - jen ve stupních (radiány nutno převést)
2) Kalkulačka
3) Graficky - jen ve stupních (radiány nutno převést)

př: $\sin 60^0 + 2\cos 60^0 - \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

př: $tg\frac{\pi}{4} + \cot g\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$

př: $\cot g 30^0 - tg 60^0 = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

př: $\sin \frac{25}{6}\pi = \sin\left(\frac{1}{6}\pi + 2.2\pi\right) = \sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$

př: $\cos\left(-1170^0\right) = 0$

dle vzorce $x = \frac{-1170.\pi}{180} = -6{,}5\pi$

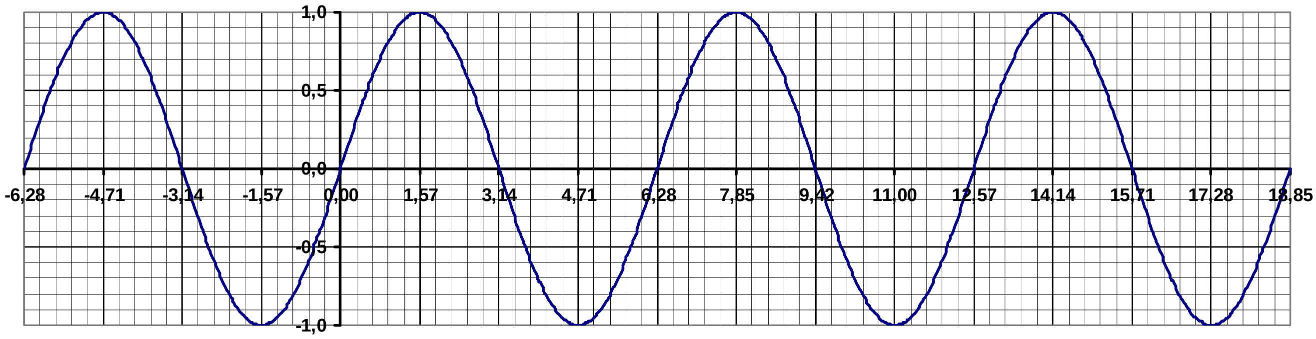
$\cos(-1170^0) = \cos(-6{,}5\pi)$

cos je periodická s periodou 2π

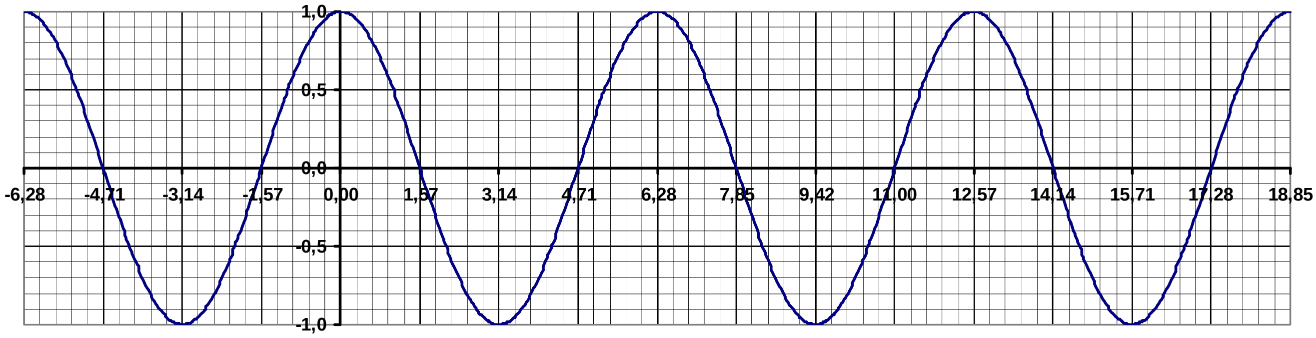
$\cos(-6{,}5\pi) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 4.2\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$

6.4. Grafy goniometrických funkcí

a) $y = \sin x$



b) $y = \cos x$



Cvičení:

př: Graf $y = \sin 2x$ $\qquad$ $y = \sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$

6.5. Vlastnosti goniometrických funkcí

sinus x

kosinus x

Definiční obor obou funkcí je množina všech reálných čísel tj. $x \in (-\infty, \infty)$.

Obor funkčních hodnot obou funkcí je interval $\langle -1,1 \rangle$

Věta: pro každé $x \in$ R a pro každé $m \in Z$ platí: sin $(x + 2m\pi)$ = sin x

cos $(x + 2m\pi$ = cos x

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
sinus	+	+	-	-
kosinus	+	-	-	+
sinus	rostoucí	klesající	klesající	rostoucí
kosinus	klesající	klesající	rostoucí	rostoucí

tangens x $= \dfrac{\sin x}{\cos x}$

kotangens x $= \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\qquad$ $(2m+1).\dfrac{\pi}{2}$

Definiční obor *fce* tangens je množina všech reálných čísel různých od $\frac{\pi}{2}+2m\pi$

a $\frac{3}{2}\pi+2m\pi$ kde m je libovolné celé číslo.

Jinak: mimo lichých násobků čísla $\frac{\pi}{2}$

Definiční obor *fce* kotangens je množina všech reálných čísel různých od $m.\pi$,

m je libovolné celé číslo.

Obor funkčních hodnot je množina R tj. $(-\infty,\infty)$

Věta: Pro každé x z definičního oboru *fce* tangens (kotangens) a pro každé $m \in Z$

je $tg(x+m\pi)=tgx$

$\text{cotg}\,(x+m\pi)=\cot gx$

Další vlastnosti: 1) $\left.\begin{array}{l}\sin(-x)=+\sin x\\ \cos(-x)=-\cos x\end{array}\right\}$ $x \in R$

2) $x \in R$ $\left.\begin{array}{l}x \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}\\ tg(-x)=-tgx\end{array}\right\}$ $m \in Z$

3) $x \in R$ $x \neq m\pi$

$\text{cotg}(-x)=-\cot gx$

4) $x \in (0,\frac{\pi}{2})$

$$\sin x=\sin(\pi-x)=-\sin(\pi+x)=-\sin(2\pi-x)$$

$$\cos x=-\cos(\pi-x)=-\cos(\pi+x)=\cos(2\pi-x)$$

6.6. Goniometrické rovnice

př: $\sin x=0{,}5$

Řešení nejdříve v $\langle 0,2\pi)$

$$x_1=\frac{\pi}{6}$$

$$x_2=\frac{5}{6}\pi$$ perioda je 2π

Řešení: $\frac{\pi}{6} + 2m\pi \qquad m \in Z$

$\frac{5\pi}{6} + 2m\pi \qquad m \in Z$

př: $\cot gx$ = -1,28

Řešíme v intervalu $(0^0, 180^0)$

$\cot gx$ = -1,28

- $\cot gx$ = $\cot gx'$ = 1,28

přitom $x' \in \left(0^0, 90^0\right) \Rightarrow x' = 38^0$

platí: $x = 180^0 - x'$
$x = 142^0$

- perioda 180^0

řešení: $142^0 + m.180^0 \qquad m \in Z$

př: $\cos(30^0 + x) = -0{,}86$

substituce $y = 30^0 + x$

$\cos y = -0{,}86$

$\cos y_1 = \cos y_2 = -0{,}86 = -\cos y_3$

$$y_3 \doteq 30^0 40'$$
$$y_1 = 180^0 - 30^0 40' = 149^0 20'$$
$$y_2 = 180^0 + 30^0 40' = 210^0 40'$$

$$x_1 = y_1 - 30^0 = 119^0 20'$$
$$x_2 = y_2 - 30^0 = 180^0 40'$$

perioda $2\pi = 360^0$

Řešení: $119^0 20' + m.360^0 \qquad m \in Z$

$180^0 40' + m.360^0$

př:

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$$
$$substituce : \cos x = y$$
$$2y^2 - 7y + 3 = 0$$

$$D = \left(-7^2\right) - 4.2.3 = 25$$

$y_1 = 3$

$y_2 = 0{,}5$

$\cos x_1 = 3$ nevyhovuje $|\cos x| \leq 1$

$\cos x_2 = 0{,}5$

řešení: $\frac{\pi}{3} + 2m\pi$

$\frac{5}{3}\pi + 2m\pi \qquad m \in Z$

<u>Vzorce:</u>

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $tgx.\cot gx = 1 \qquad x \neq m.\frac{\pi}{2} \qquad m \in Z$

3) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y.\cos x$

4) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y.\cos x$

5) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x.\sin y$

6) $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

7) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

8) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

9) $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

10) $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

11) $\sin x + \sin y = 2.\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

12) $\sin x - \sin y = 2.\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

13) $\cos x + \cos y = 2.\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

14) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

6.7. Sinová věta

Užití pro hledání velikostí stran a úhlů v libovolném trojúhelníku.

Věta: Nechť ABC je libovolný trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velkost α, β, χ a strany délky a, b, c.

Pak platí: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\chi}$

Jinak: Poměr délky strany a hodnoty sinu velikosti protilehlého úhlu je v trojúhelníku konstantní.

Užití: a) je-li dána délka jedné strany a velikosti dvou vnitřních úhlů

b) jsou-li dány délky dvou stran a velikost vnitřního úhlu proti jedné z nich.

př: Trojúhelník ABC, dáno: $\alpha = 0{,}845, \beta = 0{,}682, c = 5{,}24m$

Řešení: v každém trojúhelníku je součet vnitřních úhlů roven π. Úhly jsou zadány v radiánech.

Úhel ABC = $\chi = \pi - \alpha - \beta = \pi - 0{,}845 - 0{,}682 \doteq 1{,}615 = 1{,}615$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\chi} \Rightarrow a = c.\frac{\sin\alpha}{\sin\chi} = 5{,}24.\frac{0{,}748}{0{,}999} = a = 3{,}92m$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad b = a.\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 3{,}92.\frac{0{,}630}{0{,}748} = b = 3{,}30m$$

př: Trojúhelník ABC dáno: $\chi = 72^0 10', b = 8{,}54m, c = 10{,}82m$

Určete ostatní úhly a strany trojúhelníku.

úhel ABC = β

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\chi} \qquad \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{c}.\sin\chi = \frac{8{,}54}{1{,}82}.\sin 72^0 10' = \sin\beta \doteq 0{,}751$$

$$\beta \in \left(0^0, 180^0\right) \qquad \beta_1 = 48^0 40' \qquad \beta_2 = 131^0 20'$$

β_2 nevyhovuje, neboť $\underline{\beta_2 + \chi = 203^0 30'}$

$\underline{\beta = 48^0 40'}$

$\alpha = 180^0 - \beta - \chi = 180^0 - 48^0 40' - 72^0 10' = 59^0 10'$

$\underline{\alpha = 59^0 10'}$

$$a : \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\chi} \qquad \Rightarrow a = c.\frac{\sin\alpha}{\sin\chi} = 10{,}82.\frac{0{,}8587}{0{,}9520} = 9{,}76$$

$$\underline{a = 9{,}76m}$$

<u>Věta:</u> Pro obsah S trojúhelníku, jehož strany mají délku a,b,c a vnitřní úhly α,β,χ platí:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\chi = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

př: Trojúhelník ABC: $a = 25{,}10m, \alpha = 63^0, \beta = 38^0$ $\qquad S = ?$

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin\chi$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad b = a.\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 25{,}1.\frac{\sin 38^0}{\sin 63^0} = 25{,}1.\frac{0{,}6157}{0{,}8910} \doteq 17{,}34$$

$$b = 17{,}34m$$

$$\chi = 180^0 - \alpha - \beta = 180^0 - 63^0 - 38^0 = 79^0$$

$$\chi = 79^0$$

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin\chi$$

$$S = \frac{1}{2}25{,}1.17{,}34.\sin 79^0 = 217{,}62.0{,}9816 \doteq 213{,}6m^2$$

Obsah trojúhelníku je <u>213,6</u> m^2.

6.8. Kosinová věta

Věta: Nechť ABC je libovolný trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikost α,β,χ a strany délky a,b,c.

Pak platí: a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\chi$

Užití: a) jsou-li dány délky všech tří stran a máme určit úhly

b) jsou-li dány délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného př: Trojúhelník ABC, $a = 6{,}9m, b = 4{,}3m, c = 3{,}1m$

Určit úhly α, β, χ

z Kosinové věty $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4{,}3^2 + 3{,}1^2 - 6{,}9^2}{2.4{,}3.3{,}1} = -0{,}7318$$

$$\cos\alpha' = 0{,}7318$$

$$\alpha' = 43^0$$

$$\alpha = 180^0 - 43^0$$

$$\underline{\alpha = 137^0}$$

úhel β

z kosinové věty: $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$

$$\cos\ \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos\beta = \frac{3{,}1^2 + 6{,}9^2 - 4{,}3^2}{2.3{,}1.6{,}9} = 0{,}9053$$

$$\underline{\beta \doteq 25^0 10'}$$

$$\chi = 180^0 - \alpha - \beta$$

$$\chi = 180^0 - 137^0 - 25^0 10' = 17^0 50'$$

$$\chi = 17^0 50'$$

$$\underline{\alpha = 137^0, \beta = 25^0 10', \chi = 17^0 50'}$$

př: Trojúhelník ABC, $a = 51{,}34m, b = 34{,}75m, \chi = 64^0 30'$

$c = ?, \alpha = ?, \beta = ?$

c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ac.\cos\chi$

$$c^2 = 51{,}34^2 + 34{,}75^2 - 2.51{,}34\ .34{,}75.\cos 64^0 30' = 2307{,}24$$

$$\underline{c = 48{,}03m}$$

β pomocí sinové věty:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\chi}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}\sin\chi$$

$$\sin\beta = \frac{34{,}75}{48{,}03}.\sin 64^0 30' = 0{,}6530$$

$$\beta_1 = 40^0 46'$$

$$\beta_2 = 139^0 14' - nevyhovuje \rightarrow \beta_2 + \chi \rangle 180^0$$

proti větší straně leží větší úhel

$$\underline{\beta = 40^0 46'}$$

$$\alpha = 180^0 - \beta - \chi = 180^0 - 40^0 46' - 64^0 30' = 74^0 44'$$

$$\underline{\alpha = 74^0 44'}$$

$$\underline{c = 48{,}03m, \beta = 40^0 46', \alpha = 74^0 44'}$$

7. KOMBINATORIKA

7.1. Základní kombinatorické pravidlo

<u>Věta</u>: počet všech uspořádaných dvojic, jejichž první člen lze vybrat právě n_1 způsoby a jejichž druhý člen lze po výběru prvního členu vybrat právě n_2 způsoby, je roven $n_1 \,.\, n_2$.

<u>Věta (zobecnění):</u> Počet všech upořádaných k-tic, jejichž 1. člen lze vybrat právě n_1 způsoby, 2. člen po výběru 1. členu právě n_2 způsoby atd., až $k-tý$ člen po výběru $(k-1)-ho$ členu právě n_k způsoby, je roven $n_1 \,.\, n_2 \,.\, n_3 .....n_k$.

př: 1 Z města A do města B vedou 4 cesty, z města B do města C vedou 2 cesty. Určete počet různých cest, které vedou z A do C a procházející přitom městem B.

Řešení: $A \to B.....1,2,3,4$

$B \to C.....a,b$

Vypíšeme dvojice: $[1,\ a]$, $[2,\ a]$, $[3,\ a]$,$[4,\ a]$,

$[1,b]$, $[2,b]$ $[3,b]$, $[4,b]$

$A \to C$ 8 cest také 4 . 2 = <u>8</u>

př: 2 Kolik dvojjazyčných slovníků je třeba vydat, aby byla zajištěna možnost překladu z RJ, AJ, NJ a FJ do každého z nich.

Dvojice [R,A], [R,NJ], [R,F],

[A,R], [A,N], [A,F],

[N,R], [N,A], [N,F],

[F,R], [F,A], [F,N], $\Rightarrow$ 12 dvojic jinak 4 . 3 = <u>12</u>

př: 3 Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Uspořádané dvojice (lze vypsat)

1. člen z 9 cifer (nelze použít 0)
2. člen z 9 cifer (přibyla cifra 0)
3. člen z 8 cifer

9 . 9 . 8 = 648 trojciferných čísel dané vlastnosti

7.2. Variace

definice: Variace $k-té$ třídy z n prvků je každá uspořádaná $k-tice$ sestavená z těchto n prvků tak, že každý je v ní obsažen nejvýše jednou.Dbá se na pořadí prvků.

$n \geq k$

pokud $n < k$ variace $k - té$ n prvků neexistuje

př: Napište variace třetí třídy z prvků 3,5,7,9

[3,5,7]…….

[3,5,9]…… pro počet variací třetí třídy ze 4 prvků platí:

[3,7,9] ….. $V_3(4)$ = 4 . 3 . 2 = 24 možností

[5,7,9]……

Věta: Počet $V_k(n)$ všech variací $k - té$ třídy a z n prvků platí:

$V_k(n) = n(n-1).(n-2).....(n-k+1)$

7.3. Permutace

Při sestavování variací $k - té$ třídy z n prvků dostáváme uspořádané $k - tice$, které v případě $k < n$ se liší <u>umístěním</u> jednotlivých prvků s tím, že obsahují <u>různé</u> prvky.

př: Variace třetí třídy ze 4 prvků 1,2,3,4

[1,2,3], [3,1,2] liší se uspořádáním (umístěním)

[1,2,3], [2,3,4] neobsahuje tytéž prvky

V případě $k = n$ $k - tice$ se <u>liší pouze uspořádáním</u>

$\Rightarrow$ každý prvek je zde právě jednou.

Definice: Permutace z n prvků je každá variace $n - té$ třídy z těchto n prvků.

$P_{(n)}$ - permutace z n prvků.

$\Rightarrow$ je to variace $n - té$ třídy z těchto n prvků.

$V_k(n) = n(n-1).(n-2).....(n-k+1)$

ale $k = n$

$P_{(n)} = V_n(n) = n.(n-1).(n-2)......3.2.1$

$\Rightarrow$ to znamená $P_{(n)} = n.(n-1).(n-2).....2.1$

tento součin značíme $n\,!$

(čteme n **faktoriál)**

Definice: Pro každé celé kladné číslo n je $n\,!$ **= 1.2.3…..** $(n-2)(n-1).n$

Pro n =0 **je 0! = 1**

Věta: Pro počet všech permutací z n prvků platí $P_{(n)} = n\,!$

Př: Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápise je každá z číslic 0,1,3,4,7

Řešení: musí tam být všechny cifry $\Rightarrow$ jedná se o počet všech permutací z prvků, ale žádná nesmí začínat nulou.

Počet všech permutací z 5 prvků $P_{(5)} = 5!$

Počet všech permutací, které mají na 1. místě nulu $P_{(4)} = 4!$

Výsledek: $P_{(5)} - P_{(4)} = 5! - 4! = 96$

5! = 5.4.3.2.1=120

4! = 4.3.2.1= 24

Př.: Na schůzi mluví pět řečníků.

a) Kolik je možností pořadí jejich proslovů
b) Kolik je možností, že B mluví ihned po A
c) Kolik je možností, že B mluví po A

Řešení: a) $P_{(5)} = 5! = 120$

b) Pořadí AB nahradíme X

př: [C,D,A,B,E,] , [A,B,E,D,C]…………..

[C,D,X,E] , [X,E,D,C]…………..

tj.permutace ze 4 prvků $P_{(4)} = 4\mathbf{!} = \underline{24}$

c) Ke každému proslovu, kdy B mluví po A existuje pořadí, kdy A mluví po B

[C,A,B,D,E] - [C,B,D,E]

[A,E,D,C,B] - [B,E,D,C,A]

tj. vyhovuje jen polovina

$$\frac{1}{2} P_{(5)} = \frac{1}{2} 5\mathbf{!} = \underline{60}$$

Uvědomit si: $(n+1)! = (n+1).n!$

př: Zjednodušte: $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} - \dfrac{(n+1)!}{n!}$

$(n+2)\mathbf{!} = (n+1)\mathbf{!}\,(n+2)$

$(n+1)\mathbf{!} = n\,\mathbf{!}\,(n+1)$

$$\frac{(n+1)!(n+2)}{(n+1)!} - \frac{n!(n+1)}{n!} = (n+2) - (n+1) = \underline{\mathbf{1}}$$

Cvičení:

1) $\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}=\frac{(n+2)(4+1)-3(4+2)-n^2+4}{(n+2)!}=\frac{n^2+3n+2-3n-6+4}{(n+2)!}=$

$=\frac{0}{(4+2)!}=0$

2) 5 místná lavice 2 chtějí sedět vedle sebe.

AB=X

BA= Y $\left.\begin{matrix} 4!=4.3.2.1=24 \\ 4!=4.3.2.1=24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 48$ způsobů

7.4. Kombinace

nezáleží na uspořádání, záleží které prvky obsahují.

Definice: Kombinace $k-té$ třídy z n prvků je každá k - prvková podmnožina množiny určené těmito n prvky.

$C_k(n)$ - kombinace $k-té$ třídy z n prvků

př: Určete všechny kombinace druhé třídy z prvků 3,5,7,9

Řešení: Jsou to dvou prvkové podmnož.možiny

$\{3,5,7,9\}$, tj: $\{3,7\},\{3,5\},\{3,9\}$

$\{5,7\},\{5,9\},\{7,9\}$

Vztah mezi variací a kombinací $C_k(n)=\frac{1}{k!}.V_k(n)$

$\binom{n}{k}$ se nazývá kombinační číslo

Definice: Pro všechna přirozená čísla n,k taková, že $n \geq k$ je $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Věta: Pro počet $C_k(n)$ všech kombinací $k-té$ třídy z n prvků platí:

$$C_k(n)=\binom{n}{k}.$$

Poznámka: vysvětlení proč **0! = 1**

$$C_k(n)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pro $k=n$ existuje jediná kombinace $k-té$ třídy z n prvků tj. n prvková množina má jedinou n prvkovou podmnožinu a to sebe sama platí:

$$C_n(n)=1 \qquad \text{pokud} \quad k=n$$

$$C_k(n)=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!0!}=1\Rightarrow \mathbf{0!=1}$$

př: Určete kolika způsoby může shromáždění 30 lidí zvolit ze svého středu tříčlenný výbor. Srovnejte zvolit předsedu, místopředsedu a pokladníka.

Řešení: V trojicích nezáleží na uspořádání a každá osoba je zde nejvýše jednou $\Rightarrow$ jedná se o tříprvkové podmnožiny třicetiprvkové množiny,tj.o kombinace třetí třídy ze třiceti prvků:

$$C_3(30)=\binom{30}{3}=\frac{30!}{3!(30-3)!}=\frac{30!}{3!27!}=4060$$

Tříčlenný výbor může shromáždění zvolit <u>4060 způsoby.</u>

Srovnání: V každé zvolené trojici záleží na tom, kdo je předsedou, místopředsedou a pokladníkem, jedná se o uspořádané trojice. Protože každá osoba je v této trojici nejvýše jednou, jsou tyto trojice variace třetí třídy ze 30 prvků:

$$V_3(30)=30.29.28=24360$$

Shromáždění může zvolit výbor <u>24 360 způsoby.</u>

př: K účasti na turnaji se přihlásilo 6 družstev. Určete počet všech utkání, hraje-li se systémem každý s každým.

Řešení: Ve dvojicích nezáleží na pořadí, tj. hraje-li A s B je to stejné jako B s A. V těchto dvojicích se každé družstvo vyskytuje nanejvýš jednou, neboť žádné družstvo se neutká samo se sebou. $\Rightarrow$ kombinace druhé třídy ze šesti prvků.

$$C_2(6)=\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!4!}=15$$

Celkem se musí hrát <u>15 utkání.</u>

Cvičení:

1) Určete, kolik přímek je určeno 10 body, jestliže žádné 3 z nich neleží v přímce.
Řešení: Každá kombinace druhé třídy z deseti bodů určuje jedna přímka.

$$C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \mathbf{[45]}$$

2) Určete, kolika způsoby může utvořit 15 chlapců a 10 dívek taneční pár.
Řešení: Dvojice mají různé osoby a nezáleží na uspořádání. Ze všech:

$$C_2(25) = \binom{25}{2}$$

mínus dvojice tvořené jen chlapci a jen dívkami $\Rightarrow$ to nejsou taneční páry.

$$C_2(25) - C_2(15) - C_2(10) = \binom{25}{2} - \binom{15}{2} - \binom{10}{2} = 150$$

Jinak: Užití kombinatorického pravidla uspořádané dvojice [chlapec,dívka]
výběr chlapce 15 možností
výběr dívky 10 možností

$$\left.\begin{matrix}15\\10\end{matrix}\right\} \Rightarrow 15 \,.\, 10 = \underline{150}$$

7.5. Vlastnosti kombinačních čísel

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ $\quad n, k$ přirozená

$n \geq k$

1) $k = 0$ $\quad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$

2) $n = 0$ $\quad \binom{0}{0} = 1$

$k = 0$

3) $k = 1$ $\quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$

jinak: je to počet jednoprvkových podmnožin n prvkové množiny
těch je n

Věta 1:Pro všechna přirozená čísla n, k taková, že $n \geq k$, platí:

$$\underline{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$$

Důkaz: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Věta 2: Pro všechna přirozená čísla n, k taková, že $n \geq k$, platí:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

př: Řešte rovnici: $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \frac{5x}{2}$

řešení: $x \geq 2$ $\binom{x}{x-2} = \binom{x}{2}$, $\binom{x}{x-1} = \binom{x}{1}$

$$\Rightarrow \binom{x}{2} + \binom{x}{1} = \binom{x+1}{2}$$

$$\binom{x+1}{2} = \frac{5x}{2}$$

$$\frac{(x+1).x}{2} = \frac{5x}{2}$$

$$x^2 + x - 5x = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$x_1 = 0$ <u>- nevyhovuje</u>

$x_2 = 4$ <u>- vyhovuje</u>

Pascalův trojúhelník

1. řádek $n=0$ $$\binom{0}{0}$$

2. řádek $n=1$ $$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

3. řádek $n=2$ $$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

4. řádek $n=3$ $$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

5. řádek $n=4$ $$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$(k+1)$*.řádek* $$\binom{k}{0} \binom{k}{1} \binom{k}{2} \ldots\ldots\ldots \binom{k}{k-2} \binom{k}{k-1} \binom{k}{k}$$

$n = k$

Číselné vyjádření:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

symetričnost $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Součet dvou sousedních čísel = číslu v následujícím řádku pod jejich středem

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

7.6. Binomická věta

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - uspořádané dvojice

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ - uspořádané trojice

Věta: Pro každé a, b a každé přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots.$$

$$\ldots\ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

vytvořili jsme binomický rozvoj

má binomické koeficienty

Binomické koeficienty v binomickém rozvoji výrazu $(a+b)^n$ tvoří řádek Pascalova trojúhelníku.

Věta: Každá n - prvková množina má právě 2^n podmnožin.

př: $(a+b)^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

př: Vypočtěte sedmý člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$

$$\binom{9}{6}.\left(2x^2\right)^3.\left(-\frac{1}{x}\right)^6 = \frac{9!}{6!3!}.8x^6.\frac{1}{x^6} = 672$$

8. PLANIMETRIE

8.1. Podobnost trojúhelníků

Opakování shodnosti trojúhelníků:

$$\Delta \; ABC \cong \Delta \; A'B'C'$$

Věty: Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují:

1) ve všech třech stranách (sss)
2) ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném (sus)
3) ve dvou stranách a vúhlu proti větší z nich (ssu)
4) v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých (usu)

Definice: Podobné zobrazení (podobnost) v rovině nazýváme každé zobrazení v rovině takové, že existuje reálné číslo $k > 0$ tak, že pro libovolné body A, B dané roviny a jejich obrazy A', B' platí: $|A'B'| = k.|AB|$.

číslo k se nazývá poměr podobnosti. (koeficient podobnosti)

Věty: Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže :

1) se shodují ve dvou úhlech (uu)
2) se shodují poměry všech odpovídajících si stran (sss)
3) jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly jimi sevřené (sus)
4) jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly proti větším z nich (ssu)

Dbát na uspořádání vrcholů!

Všechny rovnostranné trojúhelníky, čtverce a kružnice jsou podobné.

$\approx$ znak podobnosti

Shodnost je zvláštní případ podobnosti (k =1)

Př: Stín stromu má délku 9 m, stín svislé metrové tyče má v tutéž dobu délku 1,5m. Určete výšku stromu.

$$\Delta \; ABC \approx \Delta \; PQR \qquad \text{(uu)}$$

$$\left|\frac{AB}{PQ}\right| = \left|\frac{AC}{PR}\right| \qquad \Rightarrow |AB| = |PQ|.\left|\frac{AC}{PR}\right|$$

$$|AB| = 1.\frac{9}{1,5} = \underline{6}$$

Strom je vysoký 6 metrů.

Cvičení:

1) př: Stín věže má délku 57 m, stín svislé metrové tyče má v tutéž dobu délku 150 cm.
   Vypočtěte výšku věže. **[38m]**

2) př: $\Delta\ ABC$: $a = \frac{7}{6}m, b = \frac{4}{3}m, \chi = 55^0$

   $\Delta\ A_1B_1C_1$: $a_1 = \frac{7}{4}m, b_1 = 2m, \chi = 55^0$

   Jsou podobné? **[ano]**

3) př: $\Delta\ ABC$: $|BC| = 6cm, |AC| = 8cm, |AB| = 9cm$

   $\Delta\ A'B'C'$: $|B'C'| = 5cm, |A'C'| = 6{,}6cm, |A'B'| = 7{,}5cm$

   Jsou tyto trojúhelníky podobné? **[nejsou]**

8.2. Pythagorova věta

<u>Věta</u>: Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.

$$c_2 = a^2 + b^2$$

př: Určete délku $\sqrt{2}$ a délku $\sqrt{3}$.

př: Je-li strana rovnostranného trojúhelníku a, vypočtěte jeho výšku.

př: Je-li výška rovnostranného trojúhelníku v, vypočtěte jeho stranu.

př: Mostní kruhový oblouk má rozpětí $2a$, výšku v, určete poloměr r.

$$[\ v = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad a = \frac{2.\sqrt{3}}{3}.v \quad r = \frac{a^2 + v^2}{2v}\ ]$$

<u>Pythagoras ze Samu</u> (580-800 př.n.l.) řecký matematik a filosof

<u>Euklides z Alexandrie</u> (365-300 př.n.l.)

věty a poučky tvoří obsah tzv.euklidovské geometrie

8.3. Euklidovy věty

$\alpha + \beta = 90^0$ $\Rightarrow$ *úhel* $BCD \approx \alpha$

úhel $ACD \approx \beta$

dle $\Delta\ ACD \approx \Delta\ CBD$

a zároveň $\Delta\ ABC \approx \Delta ACD$

$\Delta\ ABC \approx \Delta CBD$

z toho, že $\Delta\ ACD \approx \Delta\ CBD \Rightarrow \left|\frac{AD}{CD}\right| = \left|\frac{CD}{BD}\right| \Rightarrow |AD|.|BD| = |CD|^2 \Rightarrow \underline{v^2 = c_1.c_2}$

<u>Věta o výšce:</u>

<u>Věta:</u> V každém pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad jeho výškou roven obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků na přeponě.

$$\underline{v^2 = c_1.c_2}$$

<u>Věta o odvěsně</u>

<u>Věta</u>: V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad jeho odvěsnou roven obsahu obdélníku sestrojeného z celé přepony a úseku na přeponě k dané odvěsně přilehlého.

$$a^2 = c.c_1$$

$$b^2 = c.c_2$$

8.4. Obsahy a obvody rovinných obrazců

Trojúhelník $S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{b.v_b}{2} = \frac{c.v_c}{2}$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\chi = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$o = a + b + c$$

výška Δ: část kolmice spuštěná z vrcholu na protější stranu

těžnice Δ: spojnice vrcholu se středem protější strany

těžiště Δ : průsečník těžnic dělí těžnici v poměru 1:2 blíže ke straně

střední příčka Δ: spojnice středů stran

vlastnost: je rovnoběžná se stranou, jejíž středem neprochází je polovina strany jejíž středem neprochází

střed kružnice Δ opsané – průsečík os stran

střed kružnice Δ vepsané – průsečík os úhlů

$$S = \frac{a.b.c}{4r}$$ r - poměr kružnice Δ opsané

$$r = \frac{c}{2.\sin\chi} = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta}$$

Heronův vzorec:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Čtyřúhelníky

Rovnoběžník $S = a.v_a = b.v_b = a.b.\sin\alpha$

$o = 2.(a+b)$

je čtyřúhelník, který má protější strany shodné a rovnoběžné, úhlopříčky se navzájem půlí

Čtverec $S = a_2 = \frac{1}{2}n^2$

$o = 4a$

úhlopříčky se půlí, jsou shodné a na sebe kolmé lze mu vepsat i opsat kružnice

Kosočtverec $S = \frac{1}{2}n_1.n_2$

$n_{1,}n_2$ - úhlopříčky

Obdélník $S = a.b$

$o = 2.(a+b)$

úhlopříčky se půlí a jsou shodné, nelze mu vepsat kružnice, lze mu opsat kružnice.

Lichoběžník $S = \frac{z_1 + z_2}{2}.v$

$o = z_1 + z_2 + rameno + rameno$

je čtyřúhelník, který má dvě protější strany rovnoběžné a dvě různoběžné

Obecný n - úhelník S - rozdělí se na trojúhelníky a jejich obsahy se sečtou

$o -$ součet

8.5. Délka kružnice a její části (kruhový oblouk)

$o = 2\pi r$

$o = \pi.d$ $\qquad l = \frac{\pi.r}{180}.\alpha$

Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od daného středu stejnou vzdálenost r.

8.6. Obsah kruhu a jeho částí

Kruh je množina bodů v rovině, které mají od daného středu stejnou nebo menší vzdálenost než r.

$$S = \pi.r^2 \qquad\qquad S = \frac{\pi.d^2}{4}$$

Kruhová výseč

$S = \dfrac{\pi.r^2}{360}.\alpha$ $\qquad$ α ve stupních

$S = \dfrac{1}{2}r^2.\beta$ $\qquad$ β v radiánech

$S = \dfrac{1}{2}r.l$ $\qquad$ l délka příslušného oblouku

x v radiánech

α ve stupních

Převody

stupně $\rightarrow$ radiány

$$x = \frac{\alpha.\pi}{180}$$

radiány $\rightarrow$ stupně

$$\alpha = \frac{x.180}{\pi}$$

Kruhová úseč

a) S = obsah kruhové výseče – obsah Δ

b) $S = \dfrac{1}{2}r^2(\beta - \sin\beta)$ $\qquad$ β - středový úhel

β v radiánech

př: Vypočtěte délky stran rovnoramenného $\Delta\, ABC$, je-li dáno $v_c = 8{,}4cm$, úhel při základně $\alpha = 32^0 10'$.

$\cot g\alpha = \dfrac{\frac{c}{2}}{v_c}$ $\qquad$ $c \doteq 2.8{,}4.1{,}590 \doteq 26{,}66cm$

$\sin\alpha = \dfrac{vc}{b}$ $\qquad$ $b = \dfrac{8{,}4}{0{,}5324} \doteq 15{,}77cm = a$

př: Vypočtěte velikost úhlu α, který svírají tečny t_1, t_2 vedené bodem A ke kružnici $k = (S, 65mm)$, je-li $|AS| = 115mm.$

úhel $T_1AS = \frac{\alpha}{2}$ $\quad\quad$ $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{|AS|} = \frac{65}{115} \doteq 0{,}5652$

$$\frac{\alpha}{2} = 34^0 25'$$

$$\alpha = 68^0 50'$$

=========

př: Na hmotný bod A působí dvě síly téže velikosti $F_1 = F_2 = 36N$, které svírají úhel 65^0. Určete velikost jejich výslednice.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{F}{2}}{F_1} \qquad F = 2F_1.\cos\frac{\alpha}{2} = 2.36.\cos 32^0 30' = \underline{60{,}7\text{N}}$$

př: Mostní kruhový oblouk má rozpětí $2a = 80m,$ výšku $v = 20m.$ Vypočtěte velikost příslušného středového úhlu $\alpha.$

$$|SS'|^2 = r - v$$

$$r^2 = a^2 + (r-v)^2$$

$$r = \frac{a^2 + v^2}{2.v} = \frac{1600+400}{40} = \underline{50\text{m}}$$

př: V pravidelném desetiúhelníku je poloměr opsané kružnice $r = 12cm.$ Vypočtěte délku strany a poloměr kružnice vepsané.

$$\omega = 36^0 \qquad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \quad \Rightarrow a = 2r - \sin\frac{\omega}{2}$$

$$a \doteq 2.12.0{,}309 \doteq \underline{7{,}4\text{cm}}$$

$$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{\delta}{r}$$

$$S = r.\cos\frac{\omega}{2} = 12.0{,}9511 = \underline{11{,}4\text{cm}}$$

př: Vypočtěte velkosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC o stranách $a = 14$cm, b =13cm, c = 15cm a jeho obsah.

Heronův vzorec $\quad s$ = 16cm

s - a =12cm

s - b =3cm

s - c =1cm

$S = \sqrt{16.12.3.1} = \underline{24cm}^2$

$S = \frac{1}{2}ac - \sin\beta$ $\sin\beta = \frac{2S}{ac} = 0{,}8$

$\underline{\beta = 53^0 8'}$

$S = \frac{1}{2}cb.\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{2S}{b.c}\frac{2.24}{13.15} = 0{,}246$

$\underline{\alpha = 14^0 15'}$

$\alpha + \beta = 67^0 23'$ $\chi = 180^0 - 67^0 23' = \underline{112^0 37'}$

9. KOMPLEXNÍ ČÍSLA

9.1. Zavedení komplexních čísel

Komplexní čísla se zavedla z toho důvodu, aby měla kvadratická rovnice řešení i pro diskriminant menší než nula. $\sqrt{D}$ pro $D < 0$

V oboru reálných čísel existuje drohá odmocnina jen z nezáporného čísla. Proto se zavedla imaginárního jednotka i, pro kterou platí $i^2 = -1$.

Tedy $\sqrt{-4} = \sqrt{i^2.4} = \pm 2i$

Jak víme, obrazem reálných čísel je osa x, obrazem komplexních čísel je Gaussova rovina $0xy$.

Definice: Komplexní číslo se nazývá každý dvojčlen $a_1 + a_2 i$, kde $a_1, a_2 \in R$.

Zápis $a_1 + a_2 i$ se nazývá algebraický tvar komplexního čísla a.

a_1 se nazývá reálná část, a_2 imaginární část

Při znázornění komplexních čísel se reálná část a_1 zobrazí na ose x, imaginární část a_2 na ose y.

9.2. Početní operace s komplexními čísly

Nejprve definujeme rovnost komplexních čísel takto:

$$a = a_1 + a_2 i \quad , \quad b = b_1 + b_2 i \ , \ a = b \text{ právě když } a_1 = b_1 \text{ a } a_2 = b_2 .$$

<u>Součet</u> dvou libovolných komplexních čísel $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$ definujeme takto:

$$a + b = (a_1 + a_2 i) + (b_1 + b_2 i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$$

př: $(3 + 2i) + (-4 - 5i) = (3 - 4) + (2 - 5)i = -1 - 3i$

<u>Rozdíl</u> dvou libovolných komplexních čísel $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$ definujeme takto:

$$a - b = (a_1 + a_2 i) - (b_1 + b_2 i) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)i$$

<u>Součin</u> dvou libovolných komplexních čísel $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$ definujeme takto:

$$a.b = (a_1 + a_2 i).(b_1 + b_2 i) = a_1.b_1 + a_1.b_2 i + a_2 i.b_1 + a_2 b_2 i^2 =$$

$$= (a_1.b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Jinak: součin dvou komplexních čísel považujeme jako součin dvou dvojčlenů, kde $i^2 = -1$.

Př: $(2 - 3i).(3 - i) = 2.3 - 2i - 3i.3 + 3i^2 = 6 - 2i - 9i + 3.(-1) = 3 - 11i$

Podíl při dělení dvou libovolných komplexních čísel, z nichž dělitel je různý od nuly, postupujeme obvykle takto: podíl komplexních čísel napíšeme ve tvaru zlomku, který rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. Ve jmenovateli dostaneme reálné číslo, kterým pak vydělíme reálnou a imaginární část čitatele. Takto určený podíl vždy existuje a je určen jednoznačně.

Dělení číslem nula není ani v množině všech komplexních čísel definován.

př: $\frac{3}{i}=\frac{3}{i}.\frac{i}{i}=\frac{3i}{i^2}=\frac{3i}{-1}=-3i$

př: $\frac{4}{5-i}=\frac{4}{5-i}.\frac{5+i}{5+i}=\frac{20+4i}{25-i^2}=\frac{20+4i}{26}=\frac{10}{13}+\frac{2}{13}i$

př: $\frac{4}{5+i}=\frac{4}{5+i}.\frac{5-i}{5-i}=\frac{20-4i}{25-i^2}=\frac{20-4i}{26}=\frac{10}{13}-\frac{2}{13}i$

9.3. Goniometrický tvar komplexního čísla

Některé úlohy s komplexními čísly se dají výhodně řešit, vyjádříme-li tato čísla v tzv. gonimetrickém tvaru.

Definice: Zápis komplexního čísla a ve tvaru

$|a|.(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ nazýváme goniometrický tvar komplexního čísla a.

Platí vztahy: $\cos\alpha=\frac{a_1}{|a|}$

$\sin\alpha=\frac{a_2}{|a|}$

α se nazývá argument komplexního čísla a.

Věta 1: Součin libovolných komplexních čísel různých od nuly je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna součinu absolutních hodnot obou činitelů a argument se rovná součtu argumentů obou činitelů.

$$a=|a|.(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

$$b=|b|.(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$a.b=|a|.|b|.[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$$

Věta 2: Podíl dvou libovolných komplexních čísel různých od nuly je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna podílu absolutních hodnot čitatele a jmenovatele a argument se rovná rozdílu argumentů čitatele a jmenovatele.

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}.[\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)]$$

9.4. Moivreova věta

Věta: Pro všechna přirozená čísla n platí: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n.\alpha + i\sin n.\alpha$

10. STEREOMETRIE

10.1. Vzájemná poloha bodů , přímek a rovin

Základní útvary: bod…… A, B …..

přímka… p , q ….

rovina….α ,τ

Axiomy: 1. Dvěma různými body je určena jediná přímka.

2. Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží v téže rovině.

3. Mají-li různé roviny společný bod, pak mají společnou přímku, která tímto bodem prochází. Mimo tuto přímku již nemají společné body.

4. Rovina je jednoznačně určena:

a) třemi body, které neleží v přímce

b přímkou a bodem, který na ní neleží

c) dvěma různoběžnými přímkami

dú dvěma různými rovnoběžkami

A =B body jsou totožné (splývající)

$A \neq B$ body jsou navzájem různé

$A \in p$ bod A leží na přímce p

$A \notin p$ bod A neleží na přímce p

$A \in q$

$A \notin q$

Rovina, které nemají společný bod se nazývají rovnoběžné různé

Roviny, které mají společnou právě jednu přímku, se nazývají roviny různoběžné

Roviny, které jsou si rovny se nazývají splývající rovnoběžné roviny

Přímka různoběžná s rovinou má s ní společný právě jeden bod-průsečík(p q, $p \cap q = P$)

Přímka rovnoběžná s rovinou:

a) leží v této rovině ($p // q$, $p \cap q = p$)

b) nebo s ní nemá společný bod ($p // q$, $p \cap = \emptyset$)

Dvě přímky v prostoru mohou být buď:

a) různoběžné – mají společný jeden bod ($p // q$, $p \cap q = P$)

b) rovnoběžné – různé ($p // q$, $p \cap = \emptyset$)

– splývající ($p = q$)

c) mimoběžné – jestliže nemají společný bod a zároveň neleží v jedné rovině

př: V pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV, kde podstavná hrana i výška jsou rovny a,

vypočítejte: a) odchylku roviny podstavy od roviny boční stěny $[63^0 26']$

b) odchylku rovin protějších bočních stěn $[53^0 8']$

10.2. Povrchy a objemy krychle, kvádru a válce

Krychle: $S = 6.a^2$

$V = a^3$

Kvádr: $S = 2.(a.b + a.c + b.c)$

$V = a.b.c$

Válec: $S = 2\pi r(r+v)$

$V = 2\pi r^2.v$

Jehlan: $S = S_p + S_{pl}$

$V = \frac{1}{3} S_p.v$

Kužel: $S = S_p + S_{pl} = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2.v$

Komolý jehlan: $S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$

$V = \frac{1}{3} v.\left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} + S_{p2}} + S_{p2}\right)$

Komolý kužel: $S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$

$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi (r_1 + r_2).s$

$V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1.r_2 + r_2^2\right)$

Koule: $S = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Kulová úseč: $V = \frac{\pi.v}{6}\left(3g^2 + v^2\right)$ $g = \sqrt{r^2 - m^2}$

Kulový vrchlík: $S = 2\pi r.v$

Kulový pás: $S = 2\pi r.v$

Kulová vrstva: $V = \frac{\pi.v}{6}\left(3g_1^{\ 2} + 3g_2^{\ 2} + v^2\right)$

Kulová výseč: $V = \frac{2}{3}\pi r^2.v$

př: Kolik km^2 zemského povrchu můžeme přehlédnout z výše 1 km nad zemí, považujeme-li Zemi za kouli o poloměru 6370km.

Řešení: $\Rightarrow$ povrch vrchlíku $S = 2\pi r.v$

Euklidova věta o odvěsně:

$r^2 = (r+h).(r-v)$

.

.

$v = \frac{r.h}{r+h}$ **dosadit** $S = 2\pi r.v$

$S = 2\pi r.\frac{rh}{r+h}$

$S = 2\pi \frac{r^2.h}{r+h}$ protože je r mnohem větší než h, tj:

$r + h \doteq r$

vzorec se upraví

$S = 2\pi \frac{r^2.h}{r+h}$

$S = 2\pi r.h$

$S = 2.3{,}14.6370.1 \doteq 40000\,[km^2]$

př: Komín tvaru komolého rotačního kužele má výšku 32m, průměry dolní podstavy 3,2m a 2m, průměry horní podstavy 1,7m a 1,2m. Jaká je jeho celková hmotnost, je-li hustota zdiva 1600 kg/m^3 ?

$m = g.V$ $V = V_1 - V_2$

$V = \frac{1}{3}\pi v\left(r^2{}_{11} + r_{11}.r_{21} + r^2{}_{21}\right) = \frac{1}{3}\pi.v.$

$\left(r^2{}_{12} + r_{12}.r_{22} + r^2{}_{22}\right)$

Pozor! Jsou dány průměry

$$V \doteq 89{,}8m^3$$

$m = 1600.89{,}8$

$m \doteq$ **<u>144 t</u>**

př: Vypočtěte povrch vrchlíku a objem kulové úseče, je-li poloměr koule 10cm a výška kulové úseče 6 cm.

$S = 2\pi r.v$

$S = 2.3{,}14.10.6$

$S \doteq \mathbf{377\ cm^2}$

$V = \dfrac{\pi.v}{6}\left(3g^2 + v^2\right)$

$g^2 = r^2 - (r-v)^2$

$g^2 = v.(2r - v)$

$V = \dfrac{\pi.v}{6}.\left(6vr - 3v^2 + v^2\right)$

$V = \dfrac{\pi.v^2}{3}(3r - v)$

$V = \dfrac{3{,}14.6^2}{3} - (30-6)$

$V \doteq 904cm^3$

=========

11. POSLOUPNOSTI

11.1. Pojem posloupnosti

Posloupnost jako speciální případ funkce.
př:1 Sledujme výkonnost našeho družstva- prvních 10 zápasů uplynulé sezóny.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	0	1	0	1	0	0	1	3	3

Uvedená množina dvojic čísel tvoří funkci jejímž oborem jsou všechna celá kladná čísla menší než 10.

Sestrojte graf

Opakujme definici funkce:

Nechť M je libovolná podmnožina množiny R všech reálných čísel. Každá množina uspořádaných dvojic $[x, y] \in MxR$, pro kterou platí: ke každému $x \in$ M existuje právě jedno $y \in$ R tak, že $[x, y] \in f$ se nazývá funkce.

Množinu M nazýváme definiční obor funkce f a značíme $D_{(f)}$.

př:2 Napište uspořádané dvojice, které patří funkci $f: y = 0{,}5x^2$ pro $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,\}$

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5

Sestrojte graf

př: 3 Funkce g má definiční obor množiny Z^+. Pro každé $n \in Z^+$ je $g_{(n)}$ rovno počtu všech kladných dělitelů čísla n.

x n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y $g_{(n)}$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2

Sestrojte graf

př:4 Narýsujte graf $fce\ \ h: y = -3 + (-1)^n$ $\qquad n \in Z^+$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-4	-2	-4	-2	-4	-2	-4	-2

Definiční obory všech funkcí částí množiny všech celých kladných čísel (Z^+).

nekonečná posloupnost př:3,4
konečná posloupnost př: 1,2

Definice: Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech celých kladných čísel Z^+, se nazývá <u>nekonečná posloupnost.</u>

Definice: Každá funkce, jejíž definiční obor je množina $\{n \in Z^+, n \leq n_0\}$, kde n_0 je pevně dané číslo ze Z^+, se nazývá <u>konečná posloupnost.</u>

Stručně hovoříme o posloupnosti

Nechť u je posloupnost z 1. příkladu. Kromě tabulky ji lze zapsat tvarem:

u ={[1,0],[2,0],[3,1],…….,[10,-2]}

Posloupnosti u patří např: dvojice [2,0]

zapisujeme [2,0] $\in u$ nebo $u(2) = 0$

čteme : hodnota posloupnosti u pro číslo 2 je 0.

nejčastější zápis: $u_2 = 0$

čteme : druhý člen posloupnosti u je 0.

Obecně: místo hodnota posloupnosti f v bodě n je rovna s $(f(n) = s)$

říkáme : n - tý člen posloupnosti f je roven s

píšeme: $f_n = s$

Opět k příkladu 1: Posloupnost n je dána výčtem členů, nelze je zaměnit!

0,0,1,0,1,0,0,3,3

posloupnost 0,0,0,1,1,0,0,3,3, je jiná, i když má tytéž prvky

neboť $u_3 = 1$, $u_4 = 0$

$v_3 = 0$, $v_4 = 1$

k př: 4 Místo zápisu $h : y = -3 + (-1)^n$ $n \in Z^+$

a) používáme označení $(-3+(-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

b) nebo $(h_n)_{n=1}^{\infty}$, $h_n = -3 + (-1)^n$

čteme a) posloupnost $-3+(-1)^n$ od n rovno 1 do nekonečna

b) posloupnost h_n od n =1 do nekonečna kde h_n se rovná $-3+(-1)^n$

k př: 2 $(0{,}5n^2)_{n=1}^{7}$

Posloupnost je dána vzorcem pro n -tý člen.

př:5 Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dána takto:

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$ a dále pro každé celé kladné číslo n je $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Určete postupně 3.,4. a 5. člen této posloupnosti.

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$$

Posloupnost je dána rekurentně - latinsky recurrere = běžeti zpět

11.2. Aritmetická posloupnost

Definice: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetický, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro každé přirozené číslo n je $a_{n+1} = a_n + d \quad \Rightarrow a_{n+1} - a_n = d$

číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti.

Př: 1 Šíření zvuku vzduchu při $0\,^0$C je asi 331 $m.s^{-1}$

S rostoucí teplotou se rychlost zvuku spojitě a rovnoměrně zvyšuje a to o $1\,^0$C o 0,6 $m.s^{-1}$. Jaká je rychlost zvuku při teplotě $5\,^0C$?, 30^0C?

Řešení: $v_n (n \in N)$ - číselná hodnota rychlosti zvuku při teplotě $(n-1)^0 C$ v $m.s^{-1}$

$0\,^0C$ …… $v_1 = 331$

$1\,^0C$ ….... $v_2 = v_1 + 0{,}6$ = 331+ 1.0,6

$2\,^0C$ …… $v_3 = v_2 + 0{,}6 = v_1 + 2.0{,}6 = 331 + 2{,}0{,}6$

$3\,^0C$ …… $v_4 = v_3 + 0{,}6 = v_1 + 3.0{,}6 = 331 + 3.0{,}6$

$4\,^0C$ …… $v_5 = v_4 + 0{,}6 = v_1 + 4.0{,}6 = 331 + 4.0{,}6$

$5\,^0C$ …… $v_6 = v_5 + 0{,}6 = v_1 + 5.0{,}6 = 331 + 5.0{,}6$

Věta 1. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro každé $n \in Z^+$:

$$a_n = a_1 + (n-1).d$$

Věta 2: Nechť r, s jsou libovolná celá kladná čísla , $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aritmetická posloupnost s diferencí d .

Pak je $a_s = a_r + (s-r).d$

př: 2 V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $a_3 = 5, a_8 = 15$.

Určete diferenci d a členy a_1, a_{17} .

Řešení dle věty 2: $a_8 = a_3 + (8-3).d$

$15 = 5 + 5d$

$d = 2$

dle věty 1: $a_3 = a_1 + 2d$

$a_1 = a_3 - 2d$

$a_1 = 5 - 2.2 = 5 - 4 = 1$

$a_1 = 1$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{17} = 1 + 16.2$

$a_{17} = 33$

jinak $a_3 = a_1 + 2d$

$a_8 = a_1 + 7d$

---

dosadím $5 = a_1 + 2d$

$15 = a_1 + 7d$ odečtu 1. od 2.

$10 = 5d$

$d = 2$

==========

$5 = a_1 + 2.2$

$a_1 = 1$

======

a_{17} - stejně vypočteme jako předešlý příklad

př: 3 Určete součet prvních 100 členů posloupnosti. $(n)_{n=1}^{\infty}$

Řešení: $(n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost její první člen je 1, diference $d = 1$

$\Rightarrow$ máme najít číslo $S_{100} = 1 + 2 + ... + 99 + 100$

napíšu o opačném pořadí: $S_{100} = 100 + 99 ...... + 2 + 1$

sečtu $2.S_{100} = (1+100) + (2+99) + ...(99+2) + (100+1)$

$\Rightarrow$ $2.S_{100} = 100.101$

$$S_{100} = \frac{100}{2}.101 = 5050$$

Součet porních 100 členů posloupnosti $(n)^{\infty}_{n=1}$ je 5050.

Věta 3: Nechť $(a)^{\infty}_{n=1}$ je aritmetická posloupnost, n libovolné celé kladné číslo. Pro součet S_n prvních n členů této posloupnosti, tj. pro $a_1 + a_2 + ... + a_n$ platí:

$$S_n = \frac{n}{2}.(a_1 + a_n)$$

Cvičení:

př:1 Rozhodněte, která z čísel 71,100 jsou členy aritmetické posloupnosti $(a_n)^{\infty}_{n=1}$, v níž je: $a_1 = -10$, $d = 4{,}5$

Řešení: a) $a_n = a_1 + (n-1).d$

Dosadíme 71=-10+(n-1).4,5

81= (n-1).4,5

18= n-1

n=19

=======

n - celé číslo $\Rightarrow$ 71 je 19 člen posloupnosti.

b) 100=-10+(n-1).4,5

110=(n-1).4,5

$24{,}\overline{4} = n - 1$

$25{,}\overline{4} = n$

=======

n - není celé číslo $\Rightarrow$ 100 není členem dané posloupnosti.

př: 2 Teploty Země přibývá do hloubky přibližně o $1\,^0C$ na 33 m. Jaká je teplota na dně dolu 1015 m hlubokého, je-li v hloubce 25 m teplota $9\,^0C$?

Řešení: $a_n = a_1 + (n-1).d$

d = 33m, $a_n = 1015m$, $a_1 = 25m$

zjišťuji n

1015 =25+ (n-1).33

990=(n-1).33

30=n-1

n=31

=====

Teplota $a_1 = 9^0C$, $d = 1^0C$, n=31, $a_n = ?$

a_n=9+(31-1).1

a_n=9+30=39 ^0C

Teplota na dně dolu je 39 ^0C.

11.3. Geometrická posloupnost

Definice: Posloupnost $(a_n)^{\infty}_{n=1}$ se nazývá geometrická, když existuje reálné číslo q,

že pro každé přirozené číslo n je $a_{n+1} = a_n.q$

Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

Předpoklad: $a_1 \neq 0, q \neq 0 \Rightarrow$ žádný člen geometrické posloupnosti není nula.

Platí: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$

============

př: Poločas přeměny rádia C (RaC) je asi 20 minut. Počáteční hmotnost rácia C je 3mg. Jaká bude jeho hmotnost za 2 hodiny?

Řešení: počáteční 3 mg

Po 20′ $\quad 3.\dfrac{1}{2}$

Po 40′ $\quad \left(3.\dfrac{1}{2}\right).\dfrac{1}{2} = 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

Po 60′ $\quad \left(3.\dfrac{1}{4}\right).\dfrac{1}{2} = 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

Po 80′ $\quad \left(3.\dfrac{1}{8}\right).\dfrac{1}{2} = 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

Po 100′ $\quad \left(3.\dfrac{1}{16}\right).\dfrac{1}{2} = 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

Po 120′ $\quad \left(3.\dfrac{1}{32}\right).\dfrac{1}{2} = 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$

Po dvou hodinách je hmotnost rádia C rovna $\dfrac{3}{64} mg$.

př: V geometrické posloupnosti $(a_n)^{\infty}_{n=1}$ je a_1 =6, a_2 =24.

Určete kvocient a její členy a_5, a_8.

Řešení: $a_2 = a_1 .\ q$ $\qquad a_5 = a_4.q = (a_3.q).q = [(a_2.q).q\ .q] =$

$\{[(a_1.q)]\ .\ q\}.\ q\ .q = a_1.q^4 = a_5 = 6.4^4 = \underline{1536}$

$$a_8 = a_7.q = (a_6.q).q = [(a_5.q).q] = a_5.q^3$$

$$a_8 = 1536.4^3 = \underline{98304}$$

<u>Věta 1:</u> V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí pro každé

$n \in N$ $\qquad a_n = a_1.q^{n-1}$

==========

<u>Věta 2</u>: Nechť r, s jsou libovolná celá kladná čísla, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost kvocientem q

Pak platí: $\qquad a_s = a_r.q^{s-r}$

============

př: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: $a_1 - a_3 = -1{,}5$, $a_2 + a_1 = 1{,}5$. Určete součet prvních pěti členů této posloupnosti.

Řešení: Nejdříve a_1 a q:

$$a_1 - a_3 = -1{,}5$$

$$\underline{a_2 + a_1 = 1{,}5}$$

$$a_1 - a_1q^2 = -1{,}5$$

$$\underline{a_1q + a_1 = 1{,}5}$$

$$a_1(1-q^2) = -1{,}5$$

$$\underline{a_1(q+1) = 1{,}5}$$

$a \neq 0$

$(q+1) \neq 0 \Rightarrow$ z 2.rovnice

z 2. rovnice

$$a_1 = \frac{1{,}5}{q+1}$$ dosadíme do 1.rovnice

$$\frac{1{,}5}{q+1}.\left(1-q^2\right) = -1{,}5$$

1,5 . (1-q) = -1,5

$$\underline{q = 2}$$

$$a_1(2+1) = 1{,}5$$

$$\underline{a_1 = 0{,}5}$$

$S_5 = a_1 \dfrac{q^5 - 1}{q - 1}$ $\qquad$ $S_5 = 0{,}5\dfrac{2^5 - 1}{2 - 1} = 0{,}5.31 = 15{,}5$

$\underline{S_5 = 15{,}5}$

Otázka: čemu je roven součet prvých n členů?

Věta 3: Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q

Platí: a) je-li $q = 1$, pak $S_n = n.a_1$

========

b) je-li $q \neq 1$, pak $S_n = a_1 \dfrac{q^{n-1}}{q-1}$

===========

př: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_4 = \dfrac{1}{3},\ a_5 = \dfrac{1}{9}.$

Vypočtěte součet prvních sedmi členů této posloupnosti.

řešení: $q = \dfrac{a_5}{a_4}$

$$q = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{3}} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$a_4 = a_1.q^3$$

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3}$$

$$a_1 = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \underline{9}$$

$$S_7 = a_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1}$$

$$S_7 = 9.\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1-3^7}{3^7}}{\frac{1-3}{3}}.9 = 3^2.\frac{1-2187}{-2.3^6} \doteq \underline{13{,}5}$$

Cvičení:

Př: 1 Která z čísel 18,12,6,0,-8 patří geometrické posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, v níž je

$a_1=27,\ q=-\frac{2}{3}$.

a) 18: $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$

$$18=27.\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{18}{27}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{2}{3}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

Nemá řešení pro n

<u>18 nepatří</u> do geometrické posloupnosti.

b) 12:

$$12=27.\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{12}{27}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{4}{9}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$n=2$

<u>12 patří</u> do geometrické posloupnosti.

c) 6: $6=27.\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$$\frac{6}{27}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{2}{9}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

Není řešení pro n

<u>6 nepatří</u>.

d) 0: nepatří

e) – 8: $-8=27.\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$$-\frac{8}{27}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$n=3$

<u>- 8 patří</u>

<u>Zajímavý příklad:</u> Kupec chtěl koupit koně. S prodavačem se dohodl takto: koně ti dám zadarmo, zaplatíš pouze hřebíky v jeho podkovách. Každá podkova je přibita 6 hřebíky, tj. 24 hřebíků. Za 1 hřebík zaplatíš 1 groš, za druhý 2 groše, za každý další dvakrát tolik než předchozí. Kolik grošů kupec zaplatil?

$$S_{24} = a_1 \frac{q^{24}-1}{q-1} \qquad q = 2, a_1 = 1$$

$$S_{24} = 1.\frac{2^{24}-1}{2-1}$$

$S_{24} = 16.777.215$ grošů

11.4. Užití aritmetických a geometrických posloupností

Zopakujme vzorce pro posloupnosti.

<u>Aritmetická posloupnost</u>

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_n = a_1 + (n-1).d$$

$$a_s = a_n + (s-r).d$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

<u>Geometrická posloupnost</u>

$$a_n = a_{n-1}.q$$

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

$$a_s = a_r.q^{s-r}$$

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \qquad q \neq 1$$

$$s_n = a_1.n \qquad q = 1$$

př: $d = 1 \quad a_1 = 85, \ a_n = 102$

$$a_n = a_1 + (n-1).d$$

$102=85+(n-1).1$

$\underline{n = 18}$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{18}{2}(85+102)$$

$\underline{s_n = 1683}$

př: $a_1 = 25, \ a_6 = 500, \ n = 6$

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

$500=25.\,q^{n-1}$

$$q^5 = 20$$

$$q = \sqrt[5]{20} \doteq 1{,}82$$

Poměr počtu dvou sousedních otáček frézky je asi <u>1,82.</u>

<u>Složené úrokování:</u>

Vklad a_0, úrok p %

Po 1. roce: $a_0 + \frac{p}{100}a_0$

Po 2.roce: $\left(a_0 + \frac{p}{100}a_0\right) + \left(a_0 + \frac{p}{100}a_0\right).\frac{p}{100}$

atd.

př: Zjistěte na jakou částku vzroste vklad 1000,- Kč vložený na vkladní knížku na počátku roku 1987 na tři roky při 4% celoročním úrokování .

$$a_1 = a_0\left(1+\frac{4}{100}\right)$$

$$a_2 = a_1 + \frac{4}{100}a_1 = a_1\left(1+\frac{4}{100}\right) = a_0 + \left(1+\frac{4}{100}\right)^2$$

$$a_3 = a_2 + \frac{4}{100}a_2 = a_2\left(1+\frac{4}{100}\right) = a_0 + \left(1+\frac{4}{100}\right)^3$$

$$a_3 = 1000\left(1+\frac{4}{100}\right)^3 = 1000.1{,}04^3 = 1125$$

Po třech letech bude na vkladní knížce <u>1125,- Kč</u>. Obecně: $a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

Odpisy:

Př: Nákupní cena stroje je 250 000,- Kč. O kolik procent klesne hodnota stroje za tři roky. odepisuje-li se ročně na amortizaci 5% ceny z předchozího roku? Za jakou dobu klesne hodnota stroje na polovinu nákupní ceny?

Úlohu můžeme počítat pomocí úloh o procentech. Ale u cíle budeme rychleji použitím Geometrické posloupnosti:

$$a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

$$a_3 = a_0\left(1-\frac{p}{100}\right)3$$

$$a_3 = 250000.\left(\frac{95}{100}\right)^3 \doteq 214300$$

Po třech letech bude mít stroj hodnotu přibližně <u>214 300,- Kč.</u>

Druhá otázka: $a_0\left(1-\frac{5}{100}\right)^n = 0{,}5a_0$

$$0{,}95^n = 0{,}5$$

Užijeme znalosti o logaritmech:

$$n.\log 0{,}95 = \log 0{,}5$$

$$n = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}95}$$

$$n \doteq 14$$

Hodnota stroje poklesne na polovinu asi za <u>14 let.</u>

12. VEKTOROVÁ ALGEBRA A ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ

12.1. Vzdálenost dvou bodů

Věta: Vzdálenost $|AB|$ dvou bodů $A=[x_1, y_1]$, $B=[x_2, y_2]$ v rovině je dána vztahem:

$$\underline{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Věta: Vzdálenost $|AB|$ bodů $A=[x_1, y_1, z_1]$, $B=[x_2, y_2, z_2]$ v prostoru je dána vzorcem

$$\underline{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

př: Určete vzdálenost bodů $A=[-1,-5.1]$, $B=[1,1,-2]$

Řešení: $|AB| = \sqrt{(1+1)^2 + (1-5)^2 + (2-1)^2} = \underline{\sqrt{29}}$

př: Rozhodněte, zda trojúhelník ABC je pravoúhlý.

$A=[3,2]$, $B=[-1,-1]$, $C=[11,-6]$

Řešení: $|AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25} = 5$ odvěsna?

$|BC| = \sqrt{(11+1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{169} = 13$ nejdelší=přepona

$|AC| = \sqrt{(11-3)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ odvěsna?

Podle Pythagorovy věty by platilo $|BC|^2 \neq |AB|^2 + |AC|^2$

Pro tento příklad: $169 \neq 25 + 128$

Trojúhelník ABC není pravoúhlý.

12.2. Souřadnice středu úsečky

Geometrické objekty (bod, přímka, rovnice…) jsou vyjadřovány algebraickými výrazy (čísla, skupiny čísel, rovnice,…)

Analytická metoda – řecký matematik Apollónios (260-170 př.n.l.)

- používání soustavy souřadnic.

Zakladatel analytické geometrie francouzský filosof a matematik René Descartes (1596-1650)

- jako matematická disciplina

Isaac Newton (1643-1727)

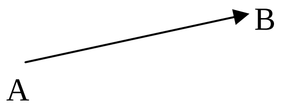
G.W.Leibniz (1646-1716)

Věta: Souřadnice libovolného bodu X je velikost úsečky $X0$ se znaménkem +, jestliže bod X leží na kladné polopřímce a se znaménkem -, jestliže leží na záporné polopřímce osy x.

Soustavu souřadnic v rovině s počátkem O a osami souřadnic x, y označujeme Oxy.

Soustavu souřadnic v prostoru s počátkem 0 a osami souřadnic x, y, z označujeme $0xyz$.

12.3. Vektor, velikost vektoru



Vektor je dán směrem a velikostí.

$\overrightarrow{AB}$ - orientovaná úsečka (směr)

A - počáteční, B - koncový

$|\overrightarrow{AB}|$ - velikost orientované úsečky

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ - jestliže přímky $AB \parallel CD$ nebo $AB = CD$

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ - souhlasně rovnoběžné

$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ - nesouhlasně rovnoběžné

Věta: Všechny orientované úsečky, které mají stejnou velikost a jsou souhlasně rovnoběžné, určující tentýž vektor.

Každou takovou orientovanou úsečku nazýváme umístění daného vektoru. Vektory se označují malými polotučnými písmeny např. ***a,b,u,w:*** v ručně psaném textu $\vec{a}, \vec{b} .. \vec{u}, \vec{v},$ nulový vektor označujeme ***o***, v ručně psaném textu $\vec{o}$.

u = XY - vektor XY je umístění vektoru ***u*** do bodu X

1) ***u*** = AB $\quad A = [x_1], \quad B = [x_2] \quad u_1 = x_2 - x_1 \quad$ ***u*** = (u_1)

2) ***u*** = AB $\quad A = [x_1, y_1], \quad B = [x_2, y_2]$

$$u_1 = x_2 - x_1$$

$$u_2 = y_2 - y_1 \qquad \boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$$

3) ***u*** = AB $\quad A = [x_1, y_1, z_1], \quad B = [x_2, y_2, z_2]$

$$u_1 = x_2 - x_1$$

$$u_2 = y_2 - y_1$$

$$u_3 = z_2 - z_1 \qquad \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

Obecný zápis, že vektor ***u*** je dán svým umístěním AB : ***u***$= B - A$

Věta: Dva vektory a, b jsou si rovny, jestliže jsou si rovny odpovídající souřadnice.

Velikost vektoru $v = AB$ je rovna velikosti jeho libovolného umístění.

Věta:

1) Velikost vektoru ***u*** $=(u_1)$ na přímce je : |***u***| $= |u_1|$
2) Velikost vektoru ***u*** $= (u_1, u_2)$ v rovině je: |***u***| $= \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}$
3) Velikost vektoru ***u*** $= (u_1, u_2, u_3)$ v prostoru je: |***u***| $= \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$

Každý vektor, který má velikost rovnu jedné, se nazývá **jednotkový vektor**

12.4. Sčítání a odčítání vektorů

Věta: Souřadnice součtu vektorů jsou dány těmito vztahy:

1) Nechť ***u,v*** jsou na přímce, ***w=u+v***. Pak je:
   w$=(u_1 + v_1)$
2) Nechť ***u,v*** jsou v rovině , ***w=u+v***. Pak je:
   w$=(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
3) Nechť ***u,v*** jsou v prostoru , ***w=u+v***. Pak je:
   w$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

<u>Opačný vektor</u>

Definice: Opačné vektory jsou stejně veliké a nesouhlasně rovnoběžné.

Věta: Je-li dán vektor ***u*** svým umístěním ***AB***, má opačný vektor umístění ***BA***. Je-li dán vektor ***u*** svými souřadnicemi na přímce ***u*** $= (u_1)$ nebo v rovině ***u*** $= (u_1, u_2)$ nebo v prostoru ***u*** $= (u_1, u_2, u_3)$, jsou souřadnice opačného vektoru – ***u*** dány vztahy:

1) na přímce: **-*u***$= (-u_1)$
2) v rovině: **-*u***$= (-u_1, -u_2)$
3) v prostoru: **-*u***$= (-u_1, -u_2, -u_3)$

<u>Rozdíl vektorů</u>

Definice: Rozdíl ***u-v*** vektorů ***u,v*** je vektor, který je součtem vektoru ***u*** a vektoru **–*v*** opačného k vektoru ***v***.

Věta: Jsou-li dány souřadnice vektorů ***u*** a ***v***, pro souřadnice vektoru ***z=u – v*** platí vztahy:

a) na přímce $\boldsymbol{z}=\left(u_1-v_1\right)$

b) v rovině $\boldsymbol{z}=\left(u_1-v_1, u_2-v_2\right)$

c) v prostoru $\boldsymbol{z}=\left(u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3\right)$

12.5. Násobení vektoru skalárem

Definice: Součin vektoru ***u*** a čísla $k \in R$ (značíme ***w***= k ***u***) je vektor rovnoběžný s vektorem ***u*** pro který platí:

1. $|\boldsymbol{w}| = |k| \cdot |\boldsymbol{u}|$
2. Je-li vektoru ***u*** nenulový a $k \neq 0$, jsou vektory ***u*** a ***w*** rovnoběžné (kolineární) a to pro k >0 souhlasně rovnoběžné, pro k <0 nesouhlasně rovnoběžné.

Je-li $k = 0$ nebo je-li ***u=o***, je vektor ***w*** nulový vektor.

Věta: Dva vektory ***a,b*** jsou rovnoběžné právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého, tj. když existuje takové reálné číslo k, že platí ***a*** = k***b.***

Souřadnice součinu vektoru a čísla $k \in R$ jsou dány těmito vztahy:

Věta: 1) Nechť ***u*** je vektor na přímce, ***w*** =k***u***. Pak platí:

$$\boldsymbol{w} = \left(ku_1\right)$$

2) Nechť ***u*** je vektor v rovině, ***w*** =k***u***. Pak platí:

$$\boldsymbol{w} = \left(ku_{1,} ku_2\right)$$

3) Nechť ***u*** je vektor v prostoru, ***w*** =k***u***. Pak platí:

$$\boldsymbol{w} = \left(ku_{1,} ku_2, ku_3\right)$$

12.6. Lineární závislost a nezávislost vektorů

Lineární kombinace vektorů ***u,v*** je výraz $k.\boldsymbol{u} + l.\boldsymbol{v}$

Definice: Dva vektory ***u,v*** nazýváme lineárně závislé, lze-li jeden z nich napsat jako násobek druhého vektoru $\boldsymbol{u} = k \cdot \boldsymbol{v}$ $\quad k, l \in R$

$$\boldsymbol{v} = l \cdot \mathbf{u}$$

Lze je umístit na jednu přímku.

Definice: Dva vektory ***u,v*** jsou lineárně nezávislé nelze-li najít čísla $k, l \in R$, aby platilo

$$\boldsymbol{u} = k \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v} = l \cdot \boldsymbol{u}$$

Nelze je umístit na jednu přímku.

Definice: Tři vektory ***u,v,w*** nazýváme lineárně závislé, lze-li jeden z nich napsat jako lineární kombinací ostatních dvou

$$\boldsymbol{w} = k \,.\, \boldsymbol{u} + l \,.\, \boldsymbol{v} \qquad k, l \in R$$

Lze vektory umístit do jedné roviny.

Definice: Nejsou-li vektory ***u,v,w*** lineárně závislé nazýváme je lineárně nezávislé.

Nelze umístit do jedné roviny.

12.7. Skalární součin, odchylka a kolmost vektorů

Definice: Skalární součin ***u,v*** dvou nenulových vektorů je reálné číslo ***u,v*** =|***u***| **.** |***v***| **.** $\cos\alpha$

Je-li jeden z vektorů ***u,v*** nulový, je ***u*** **.** ***v*** = 0

Věta: Skalární součin vektorů ***u,v*** lze vyjádřit vztahem:

a) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2$

b) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Kolmost vektorů

Věta: Je-li skalární součin dvou nenulových vektorů roven nule, jsou vektory na sebe kolmé.

a) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \Rightarrow u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$

b) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

Úhel dvou vektorů

Nenulové vektory ze vždy umístit tak, aby měly společný počáteční bod.

a) souhlasně rovnoběžné – úhel, který svírají vektory ***a,b*** je 0^0.

b) nesouhlasně rovnoběžné – úhel je 180^0

Věta 1: Jsou-li ***u*** = (u_1, u_2), ***v*** = (v_1, v_2) dva nenulové vektory, pak jejich úhel α $(0^0 \le \alpha \le 180^0)$ se vypočte podle vzorce:

$$\cos\alpha = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Věta 2: Jsou-li ***u*** =(u_1, u_2, u_3), ***v*** = (v_1, v_2, v_3) dva nenulové vektory v prostoru, pak jejich úhel α $(0^0 \le \alpha \le 180^0)$ se vypočítá podle vzorce:

$$\cos\alpha = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

12.8. Parametrické vyjádření přímky

Definice: Nechť $A = [x_1, y_1]$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ a nechť t je libovolné reálné číslo.

rovnici: $X = A + t\,.\boldsymbol{u}$

rozepsáno: $x = x_1 + t.u_1$

$y = y_1 + t.u_2$

nazýváme parametrické vyjádření přímky v rovině.

Vektor $\boldsymbol{u}$ se nazývá směrový vektor přímky (je s danou přímkou rovnoběžný)

12.9. Obecná rovnice přímky

$\boldsymbol{p}$: $A = [x_1, y_1]$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$

p $x = x_1 + u_1.t$

$y = y_1 + u_2.t$ $t \in R$ - t je parametr

nechť t je čas pak $X = [x, y]$ je poloha hmotného bodu za čas $\boldsymbol{t}$.

Je-li $\boldsymbol{t} = 0$ $\boldsymbol{X}$ **splývá s** A, za dobu $\boldsymbol{t}$ přejde do bodu o souřadnicích $[x_1 + u_1 t, y_1 + u_2 t]$

Nechť $\boldsymbol{n} = (a, b)$ je nenulový a kolmý k $\boldsymbol{p}$

$A = [x_0, y_0]$ libovolný bod přímky p

$X = [x, y]$ libovolný bod roviny

pak $X \in p$, když $\boldsymbol{AX}$ je kolmý k $\boldsymbol{n}$ nebo $\boldsymbol{AX} = 0$

tj. $\boldsymbol{AX}\,.\,\boldsymbol{n} = 0$

ale $\boldsymbol{n} = (a, b)$ $\boldsymbol{AX} = (x - x_0, y - y_0)$ pak $X \in p$ když platí

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$ax + by - ax_0 - by_0 = 0$ $-ax_0 - by_0 =$ konstanta $= \boldsymbol{c}$

$ax + by + c = 0$

Definice: Obecná rovnice přímky má tvar $ax + by + c = 0$ kde alespoň jedno z čísel a,b je nenulové.

Vektor $\boldsymbol{n} = (a, b)$ se nazývá <u>normálový vektor přímky</u>.

12.10. Směrnicový tvar rovnice přímky

Z obecné rovnice $ax + by + c = 0$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

zapisuje se $y = kx + q$

q – úsek na ose y

$k = tg\alpha$ = směrnice přímky

α - směrový úhel přímky

12.11. Vzájemná poloha dvou přímek

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$\underline{a_2 x + b_2 y + c_2 = 0}$

Možnosti: přímky: totožné

rovnoběžné různé

různoběžné

1) Přímky jsou totožné, jestliže jedna rovnice je násobkem druhé rovnice

nebo-li $a_1 = k.a_2$

$b_1 = k.b_2$

$c_1 = k.c_2$

2) Přímky jsou rovnoběžné, jestliže normálové vektory jsou rovnoběžné (vektory k nim kolmé) tj. $a_1 = k.a_2$

$b_1 = k.b_2$

3) Nejsou-li vektory $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ rovnoběžné souřadnice průsečíku dostaneme jako řešení dvou rovnic o dvou neznámých.

13. ANALYTICKÁ GEOMETRIE KVADRATICKÝCH ÚTVARŮ V ROVINĚ

13.1. Kružnice

Definice: Kružnice je geometrické místo bodů v rovině, které mají od pevného bodu stejnou vzdálenost.

Je-li X =[x,y] libovolný bod kružnice, má od středu S kružnice vzdálenost r (poloměr) tj:

$$|XS| = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \qquad \text{pro } S \text{ - počátek souřadnic}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Věta: Kružnice se středem $S = [0,0]$ a s poloměrem $r > 0$ má rovnici $x^2 + y^2 = r^2$

Body ležící uvnitř kružnice $x^2 + y^2 < r^2$

Body ležící vně kružnice $x^2 + y^2 > r^2$

př: Napište rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnice a prochází bodem $A = [-3,2]$

Řešení: $S = [0,0]$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(-3)^2 + 2^2 = r^2$$

$$r^2 = \underline{13}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 13$, poloměr $r = \sqrt{13}$

př: Rozhodněte o vzájemné poloze bodů:

$A = [4,3]$, $B = [1,1]$, $C = [2,0]$ a bodů kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení: Dosadíme souřadnice bodů

$A: 4^2 + 3^2 = 25$	$25 > 4$	A je vně
$B: 1^2 + 1^2 = 2$	$2 < 4$	B je uvnitř
$C: 4^2 + 0^0 = 4$	$4 = 4$	C leží na kružnici

Věta: Kružnice se středem $S = [m,n]$ a s poloměrem $r > 0$ má rovnici

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

$x^2 + y^2 = r^2$ středový tvar

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ středový tvar

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ obecný tvar

př: Napište středový i obecný tvar kružnice se středem $S = [1,-2]$ a poloměrem $r = 3$.

Řešení: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ - středový tvar

Umocním $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ - obecný tvar

př: Napište rovnici kružnice, která má střed $S = [-3,5]$ a prochází bodem $A = [-7,8]$.

Řešení: $(x+3)^2 + (y-5)^2 = r^2$ dosadíme souřadnice bodu A

$(-7+3)^2 + (8-5)^2 = r^2$

$r^2 = 25$

$\underline{(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25}$

$r = 5$

př: Rovnice kružnice je $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 75 = 0$.

Zjistěte r a souřadnice středu.

Řešení: uspořádáme podle x, pak podle y

$x^2 + y^2 + 8x - 10y - 75 = 0$

$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 10y + 25) = 16 + 25 + 75$

$\underline{(x+4)^2 + (y-5)^2 = 116}$

$r = \sqrt{116}$, $S = [-4,5]$

př: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7 = 0$ upravte na středový tvar kružnice.

Řešení: $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -7 + 1 + 4$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \underline{-2}$

Původní rovnice není rovnicí kružnice.

př: Napište rovnici kružnice, která prochází body $A = [5,1]$, $B = [0,6]$, $C = [4,-2]$.

Řešení: nejprve zda body neleží v přímce.

$\overrightarrow{AB} = B - a = (-5,5)$ vektory jsou různoběžné

$\overrightarrow{BC} = C - B = (4,-8)$

obecná rovnice $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Dosadím: $A = [5,1]$ $25^2 + 1 + 5a + b + c = 0$

$B = [0,6]$ $36 + 6b + c = 0$

$C = [4,-2]$ $16 + 4 + 4a - 2b + c = 0$

Řeším soustavu rovnic:
$$5a + b + c = -26$$
$$6b + c = -36$$
$$4a - 2b + c = -20$$

$$\Rightarrow \quad a = 0, b = -2, c = -24$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0 \qquad \text{obecný tvar}$$

středový tvar: $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 25$

$\Rightarrow r = 5 \quad S = [0,1]$

13.2. Vzájemná poloha přímky a kružnice

Přímka může být sečna (dva společné body)

tečna (jeden společný bod)

nesečna (nemají společný bod)

př: Zjistěte vzájemnou polohu přímky $4x - 3y - 20 = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 = 25$.

Řešení: řeší se tedy soustava rovnic:
$$4x - 3y - 20 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 25.$$

Tyto úlohy pro vzájemnou polohu přímky a kuželosečky se řeší podobně. Z rovnice přímky se vypočte některá neznámá (x nebo y) a dosadí se do rovnice kuželosečky. Bývá to zpravidla pak kvadratická rovnice. Pokud v řešení je diskriminant větší než nula, pak je přímka sečna a počítají se souřadnice průsečíků. Pokud je diskriminant roven nule, je přímka tečna a určí se souřadnice bodu dotyku. Pokud je diskriminant menší než nula, je to nesečna a dále se neřeší nic.

K příkladu: $4x - 3y - 20 = 0$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$

Dosadíme do rovnice kružnice.

$$x^2+\left(\frac{4}{3}x-\frac{20}{3}\right)^2=25$$

Po úpravách:

$$5x^2-32x+35=0$$

$$D=(-32)^2-4.5.35=324$$

$D=324>0$ Přímka je sečna.

Souřadnice $x_1=5$, $x_2=\frac{7}{5}$

Po dasazení do rovnice přímky $y_1=0$, $y_2=-\frac{24}{5}$.

Průsečíky přímky s kružnicí mají souřadnice $P=[5,0]$, $Q=\left[\frac{7}{5},-\frac{24}{5}\right]$.

13.3. Elipsa

Definice: Elipsa je geometrické místo bodů, které mají od dvou bodů stálý součet vzdáleností (větší než vzdálenost daných bodů)

F_1,F_2 ohniska elipsy součet vzdáleností $2a$

$|F_1F_2|=2e$ e - výstřednost elipsy

přímka F_1,F_2 - hlavní osa elipsy

a - hlavní poloosa

S - střed elipsy

b – vedlejší osa – kolmá na hlavní osu

A,B - hlavní vrcholy $|AB|=2a$

C,D - vedlejší vrcholy $|CD|=2b$

$$a^2=b^2+e^2$$

$$e^2=a^2-b^2$$

Definice: Elipsa se středem $S=[0,0]$, jejíž hlavní osa je totožná s osou x, má rovnici:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

kde a je velikost poloosy elipsy, b velikost vedlejší poloosy elipsy.

Definice: Elipsa se středem $S = [0,0]$, jejíž hlavní osa je totožná s osou y, má rovnici:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

kde a je velikost hlavní, b velikost vedlejší poloosy elipsy.

Definice: Elipse se středem $S = [m, n]$, jejíž hlavní osa je totožná s osou x má rovnici:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

kde a je velikost hlavní, b velikost vedlejší poloosy elipsy.

Definice: Elipsa se středem $S = [m, n]$, jejíž hlavní osa je totožná s osou y má rovnici:

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

kde a je velikost hlavní, b velikost vedlejší poloosy elipsy.

Jsou to osové rovnice elipsy .

př: Napište rovnici elipsy, hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$S = [1,3]$, $F = [-4,3]$ $\quad b = 4$

Řešení: $a^2 = e^2 + b^2$ $\qquad e = ?$

$$e = |FS| = \sqrt{(-4-1)^2 + (3-3)^2} = \underline{5}$$

$$\underline{e = 5}$$

$$a^2 = 5^2 + 4^2 = 41$$

$$\frac{(x-1)^2}{41} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Vnitřek elipsy $l_{(x,y)} < 1$

Vnějšek elipsy $l_{(x,y)} > 1$

př: Rozhodněte o vzájemné poloze bodů $A = [-2,1]$, $B = \left[\frac{5}{2}, 1\right]$ a elipsy $3x^2 + 8y^2 = 24$

Řešení: osový tvar

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1 \qquad \text{dosadíme souřadnice } A,\ B$$

$A: \frac{(-2)^2}{8} + \frac{1^2}{3} = \frac{5}{6} < 1$ vnitřní bod elipsy

$B: \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{8} + \frac{1}{3} = \frac{107}{96} > 1$ vnější bod elipsy

př: $S = [0,0]$ hlavní osa totožná s x $a = 3$, $b = 1$. Zjistěte souřadnice ohnisek.

Řešení: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

$$a^2 = b^2 + e^2$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$$

Elipsa má výstřednost $2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $F_1 = [2\sqrt{2},0]$, $F_2 = [-2\sqrt{2},0]$

př: Zjistěte velikost hlavní a vedlejší poloosy a výstřednost elipsy dané rovnicí

$$x^2 + 4y^2 = 9$$

Řešení: $x^2 + 4y^2 = 9$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

$$\underline{a = 3} \qquad \underline{b = \frac{3}{2}}$$

$$e = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \underline{\frac{3}{2}\sqrt{3}}$$

13.4. Hyperbola

Definice: Hyperbola je geometrické místo bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů (ohnisek) stejný rozdíl vzdáleností.

$F_{1,}F_2$ - ohniska

$F_{1,}F_2$ - hlavní osa hyperboly

S - střed hyperboly

$|F_1, F_2| = 2e$

e - výstřednost

A, B vrcholy hyperboly vedlejší osa

a - hlavní poloosa

b - vedlejší poloosa

$e^2 = a^2 + b^2$

Věta 1: Hyperbola, jejíž střed S je totožný s počátkem soustavy souřadnic a jejíž hlavní osa je totožná s osou x má rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde a je velikost hlavní poloosy, b je velikost vedlejší poloosy.

Věta 2: Hyperbola, jejíž střed S je totožný s počátkem soustavy souřadnic a jejíž hlavní osa je totožná s osou y, má rovnici $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, kde a je velikost hlavní poloosy, b velikost vedlejší poloosy.

Věta 3: Hyperbola se středem $S = [m, n]$ a hlavní osou rovnoběžnou s osou x má rovnici $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, kde a je velikost hlavní poloosy, b velikost vedlejší poloosy.

Věta 4: Hyperbola se středem $S = [m, n]$ a hlavní osou rovnoběžnou s osou y má rovnici $-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, kde a je velikost hlavní poloosy, b velikost vedlejší poloosy.

13.5. Vzájemná poloha přímky a hyperboly

zjistí se řešením soustavy rovnic vždy z rovnice přímky dosadíme do rovnice hyperboly.

Přímka – hyperbola	0 spol. bodů	nesečna
	1 spol. bod	tečna
	2 spol. body	sečna

Přímky $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ procházející středem hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$y = \frac{a}{b}x$, $y = -\frac{a}{b}x$ procházející středem hyperboly

$$-\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

se nazývá **asymptoty**

Rovnoosá hyperbola má asymptoty k sobě kolmé $a = b$ (poloosy jsou si rovny)

Závěr: 1. Asymptota hyperboly nemá s hyperbolou žádný společný bod. Přímka, která je s asymptotou rovnoběžná různá, má s hyperbolou společný jediný bod.

2. Přímka, která není rovnoběžná s asymptotou, má s hyperbolou buď 2 různé body – je sečna, nebo 1 bod – je tečna hyperboly, nebo nemá společný bod – je vnější přímkou hyperboly.

Věta: Rovnoosá hyperbola, jejíž osy jsou totožné s osami kvadrantů soustavy souřadnic 0_{xy},

má rovnici $y = \frac{k}{x}$ kde $k \in R, k \neq 0$

Je-li $k > 0$ leží větve hyperboly v I. a III. kvadrantu

Je-li $k < 0$ leží větve hyperboly ve II. a IV. kvadrantu

př: Napište rovnici rovnoosé hyperboly, jejímiž asymptotami jsou souřadnicové osy a která prochází bodem $M = [-3,2]$

Řešení: Hyperbola má rovnici $y = \frac{k}{x}$. Bod M leží na hyperbole. Proto platí:

$$+2 = \frac{k}{-3}$$

$$k = -6$$

Jde o hyperbolu, jejíž osy leží ve II. a IV. kvadrantu a má rovnici $y = \frac{-6}{x}$

13.6. Parabola

Definice: Parabola je geometrické místo bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F a od dané přímky d, F neleží na přímce d.

F - ohnisko paraboly

d - řídící přímka paraboly

o - osa parametru

p - parametr – vzdálenost řídící přímky od ohniska

V - vrchol – střed úsečky FD

$V = [0,0]$

$F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$

přímka d : $x = -\frac{p}{2}$

Věta 1: Parabola s parametrem p (p >0), která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a ohnisko na ose x, má rovnici $y^2 = 2px$, leží-li ohnisko na kladné ose

$y^2 = -2px$, leží-li ohnisko na záporné poloose x

Věta 2: Parabola s parametrem p (p >0), která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a ohnisko na ose y, má rovnici $x^2 = 2py$, leží-li ohnisko na kladné poloose y,

$x^2 = -2py$, leží-li ohnisko na záporné poloose y.

Věta 3: Parabola s parametrem p (p >0), která má vrchol $V = [m, n]$ a jejíž osa je rovnoběžná s osou x má rovnici $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ ohnisko vpravo od V

$(y-n)^2 = -2p(x-m)$ ohnisko nalevo od V

Věta 4: Parabola s parametrem p (p >0), která má vrchol $V = [m, n]$ a jejíž osa je rovnoběžná s osou y má rovnici $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ ohnisko F nad vrcholem V

$(x-m)^2 = -2p(y-n)$ ohnisko F pod vrcholem V

př: Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V = [-2,1]$, prochází bodem $A = [0,3]$ a má osu rovnoběžnou s osou y.

Řešení: Bod A leží nad vrcholem V, parabola bude mít tedy rovnici $(x-m)^2 = 2p(y-n)$

Dosadíme tedy do této rovnice souřadnice vrcholu V

$$(x+2)^2 = 2p(y-1)$$

Parametr p zjistíme dosazením souřadnice bodu A, který leží na parabole.

$$(0+2)^2 = 2p(3-1)$$

$$p = 1$$

Parabola má rovnici $(x+2)^2 = 2(y-1)$.

13.7. Vzájemná poloha přímky a paraboly

Řešení je obdobné jako u kružnice, elipsy a hyperboly. Postupujeme tak, že z rovnice přímky dosazujeme do rovnice paraboly.

Pokud vznikne kvadratická rovnice a diskriminant je větší než 0, přímka je sečna. Je-li diskriminant roven nule, přímka je tečna a když diskriminant je menší než nula, je přímka nesečna.

Pokud vznikne lineární rovnice, je to sečna s jedním bodem. Přímka je totiž rovnoběžná s osou paraboly.

Př: Zjistěte vzájemnou polohu přímky $3x - 7y + 30 = 0$ a paraboly $y^2 = 9x$

Řešení: Řešíme soustavu rovnic: $3x - 7y + 30 = 0$

$$y^2 = 9x$$

z první rovnice vypočteme x

$$x = \frac{7y - 30}{3} \qquad \text{a dosadíme}$$

do druhé rovnice $y^2 = 9.\frac{7y - 30}{3}$ po úpravách

$$y^2 - 21y + 90 = 0$$

Vypočteme diskriminant: $D = (-21)^2 - 4.90 = 81$

$D > 0$, tudíž jsou dva kořeny $y_1 = 15$, $y_2 = 6$ po dosazení do rovnice přímky,

pak $x_1 = 25$, $x_2 = 4$.

Přímka je sečna paraboly a protíná ji v bodech $P = [25,15]$, $Q = [4,6]$

Cvičení: Zjistěte vzájemnou polohu paraboly $y^2 = 2x$

a přímky: a) $x - y - 1 = 0$ [sečna]

b) $2x - 2y + 1 = 0$ [tečna T=[0,5,1]]

c) $x - y + 1 = 0$ [vnější přímka]

Použitá literatura:

Matematika 1. část - pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť
SPN Praha 1983 Dr. Emil Calda

Matematika 2. část - pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť
SPN Praha 1983 Doc. Dr. Oldřich Odvárko

Matematika 3. část - pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť
SPN 1984 Doc. Dr. Oldřich Odvárko

Matematika 4. část - pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť
SPN Praha 1984 Dr. Oldřich Petránek

Matematika 5. část - pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť
SPN Praha 1985

Přehled středoškolské matematiky
Prométheus 1991 Doc. RNDr. Josef Polák, CSc.

Matematické, fyzikální a chemické tabulky
SPN Praha 1987 RNDr. Jiří Mikulčák CSc.